

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

13. Band, Heft 4 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 145—192

Algebra und Zahlentheorie.

● **Leroy, Florentin:** Cours d'algèbre et d'analyse à l'usage des élèves de mathématiques spéciales, des élèves ingénieurs et des étudiants des facultés des sciences. Essai d'enseignement concret et intuitif. Tome I: Algèbre. Paris: Libr. Vuibert 1936. VIII, 201 pag. Frs. 24.—

Das Buch enthält sehr ausführliche und elementare Erklärungen für Irrationalzahlen, komplexe Zahlen, Polynome (mit ausführlichem Beweis des d'Alembertschen Satzes), symmetrische Funktionen, Determinanten usw., mit vielen geometrischen Illustration. — Die Terminologie weicht von der üblichen ab: z. B. bezeichnet der Verf. die reellen (positiven und negativen) Zahlen als „nombres algébriques“, die Taylorsche Formel als „expression symbolique“, die Determinante als „symbole résiduel“. *N. Tschebotarow (Kasan).*

● **Schreier, O., und E. Sperner:** Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. Bd. 2. (Hamburg. math. Einzelschriften. H. 19.) Leipzig: B. G. Teubner 1935. 308 S. u. 15 Fig. RM. 8.—

In derselben Sammlung (vgl. dies. Zbl. 1, 262) haben die Verff. einen ersten Band über analytische Geometrie und Algebra veröffentlicht; hier wird dasselbe Programm fortgesetzt; als Grundlage dienen noch die Vorlesungen Schreiers. Der erste Abschnitt enthält die Elemente der Gruppentheorie und insbesondere den Basissatz für abelsche Gruppen. Der zweite Abschnitt enthält die Theorie der linearen Transformationen und das Rechnen mit Matrizen, deren Elemente sowohl Zahlen aus einem gegebenen Zahlkörper k als auch Polynome mit Koeffizienten aus k sein können; Kern der Theorie ist die Betrachtung des Minimalpolynoms einer gegebenen Matrix; die Theorie der Elementarteiler einer gegebenen Matrix, und ihre Reduktion auf Normalformen werden ebenfalls behandelt. Der dritte Abschnitt, der längste, enthält die projektive Geometrie eines n -dimensionalen Raumes, analytisch behandelt; die letzten fünf Paragraphen sind der Theorie der Hyperflächen 2. Ordnung und ihrer projektiven, affinen, metrischen Einteilung gewidmet. *E. G. Togliatti (Genova).*

● **Benjaminowitsch, S.:** Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einer Halbebene und auf ihrem Rande. Mh. Math. Phys. 42, 279—308 (1935).

Der Verf. gibt zwei verschiedene Methoden zur Bestimmung der Anzahl der Wurzeln von $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ innerhalb $J(z) > 0$ und $J(z) = 0$. Die zweite dieser Methoden wurde schon vom Verf. ohne Beweise publiziert (vgl. dies. Zbl. 10, 387). — Die erste Methode beruht auf folgendem Hilfssatz: Ist λ komplex und $|\lambda| < 1$, so haben alle Gleichungen die gleiche Anzahl von Wurzeln in $J(z) > 0$ und dieselben reellen Wurzeln. Sie besteht in der Benutzung folgender zwei Regeln:

Regel A. 1. Ist $J(\varphi) > 0$ und $|\bar{f}(\varphi)| > |f(\varphi)| > 0$, so hat $\frac{\bar{f}(\varphi) \cdot f(z) - f(\varphi) \cdot \bar{f}(z)}{z - \varphi} = 0$ um eine Wurzel weniger in $J(\varphi) > 0$ als $f(z) = 0$. 2. Ist aber $J(\varphi) > 0$, $|f(\varphi)| > |\bar{f}(\varphi)| > 0$,

so hat $\frac{\bar{f}(\varphi) f(z) - f(\varphi) \bar{f}(z)}{z - \varphi}$ ebenso viele Wurzeln in $J(\varphi) > 0$ wie $f(z) = 0$. Diese Regel ist

nur für wesentlich komplexe Polynome $f(z)$ anwendbar, für die also gilt $|\bar{f}(z)| \neq |f(z)|$. — Regel B. Die Gleichungen $f(z) = 0$ und $f(z) + i\bar{f}(z)$ haben die gleiche Wurzelanzahl in $J(z) > 0$. — Ist $f(z) = 0$ reell, so benutzen wir zunächst die Regel B und sodann nach und nach die Regel A, womit die Grade der sich so ergebenden Polynomfolge bis 1 herabgesetzt werden. — Alle Beweise sind ganz elementar (ohne Benutzung der Formen-theorie) durchgeführt. *N. Tschebotarow (Kasan).*

● **Schiefner, L. M.:** On a homogeneous invariant function of a matrix of the second order. Rec. math. Moscou 42, 559—565 u. engl. Zusammenfassung 566 (1935) [Russisch].

The aim of this article is to represent a homogeneous invariant function of a

matrix of the second order in the form of a polynome of the elements of this matrix, — Conforming to the manner of the proposition of the invariant function we give the various expressions for the coefficients of the mentioned polynome. *Autoreferat.*

Grace, J. H.: The actual irreducibility of some finite systems of invariant forms. J. London Math. Soc. **11**, 20—21 (1936).

Es wird eine Methode angegeben, mit deren Hilfe man die Irreduzibilität eines vollständigen Kovariantensystems zeigen kann, d. h. mit der man zeigen kann, daß das System ein kleinstes vollständiges Formensystem ist. Die Methode wird auf die folgenden Fälle angewandt, in welchen die vollen Formensysteme seit Gordan und Cayley bekannt sind: Eine binäre Form 5. oder 6. Grades; zwei binäre Formen der Grade 2 und 3 oder 2 und 4; zwei ternäre quadratische Formen; eine ternäre kubische Form. *van der Waerden* (Leipzig).

Littlewood, D. E.: Polynomial concomitants and invariant matrices. J. London Math. Soc. **11**, 49—55 (1936).

Wenn n Veränderliche x_1, \dots, x_r linear transformiert werden vermöge einer Matrix A , so werden die Potenzprodukte der x vom Grade n ebenfalls linear transformiert vermöge einer Matrix $A^{[n]}$, und die Koeffizienten f einer Form n -ter Ordnung $f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$ werden vermöge derselben Matrix $A^{[n]}$ linear transformiert; in Matrixschreibweise: $X = AX'$; $X^{[n]} = A^{[n]} X'^{[n]}$; $F' = FA^{[n]}$,

wobei X die Spalte der x_μ , F die Zeile der f_ν bedeutet. Die Zuordnung $A \rightarrow A^{[n]}$ ist die einfachste Darstellung n -ter Stufe der linearen Gruppe; die anderen irreduziblen Darstellungen m -ter Stufe [vgl. des Ref. Gruppen v. lin. Transf., Erg. Math. **4**, H. 2 (1935)] werden durch die Partitionen $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ der Zahl m gegeben und mit $A \rightarrow A^{(\lambda)}$ bezeichnet. Die Potenzprodukte s -ten Grades der Koeffizienten von $f(X)$ werden nach der Matrix $[A^{[n]}]^{(s)}$ transformiert. Zerlegt man nun diese Darstellung in irreduzible Darstellungen $[A^{[n]}]^{(s)} \cong \sum_{(\lambda)} k_s^{(\lambda)} A^{(\lambda)}$,

wo \sum die direkte Matrixsumme, \cong die Äquivalenz bedeutet und die $k_s^{(\lambda)}$ ganzzahlige Koeffizienten sind, so hat man den Satz: Eine Form n -ter Ordnung $f(x_1, \dots, x_r)$ besitzt $k_s^{(\lambda)}$ Kovarianten s -ten Grades vom Typus (λ) . — Mit Hilfe der Methode der S -Funktionen (Littlewood and Richardson, dies. Zbl. **9**, 202) ergibt sich nun eine neue einfache Herleitung der erzeugenden Funktion für die Kovariantenzahlen k_s , welche A. Young (dies. Zbl. **7**, 149) zuerst gefunden hat:

$$A(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \prod_{\sum \alpha_\nu = n} (1 - \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \dots \alpha_r^{\alpha_r} x)^{-1} = \sum_s \sum_{(\lambda)} \pm k_s^{(\lambda)} \alpha_1^{\lambda_1 + r - 1} \dots \alpha_r^{\lambda_r} x^s.$$

Die Verallgemeinerung auf simultane Kovarianten von mehreren Formen ist leicht. Der binäre Fall wird dazu benutzt, eine Formel von Aitken (dies. Zbl. **10**, 291) für die Elementarteiler der Matrix A^n neu herzuleiten. *van der Waerden* (Leipzig).

Jacobson, N.: On pseudo-linear transformations. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 667—670 (1935).

The author considers transformations T of a vector space \mathfrak{R} of finite dimensions over an arbitrary field \mathfrak{F} not necessarily commutative satisfying the conditions

$$(x + y)T = xT + yT, \quad (x\alpha)T = (xT)\bar{\alpha} + x\alpha', \quad x, y \in \mathfrak{R}, \quad \alpha, \bar{\alpha}, \alpha' \in \mathfrak{F}$$

where the correspondence $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ is a $(1 - 1)$ automorphism and $\alpha \rightarrow \alpha'$ is a differentiation, i. e., $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$, $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$, $(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta'$, $(\alpha\beta)' = \alpha'\bar{\beta} + \alpha\beta'$. These transformations include besides linear and anti-linear transformations, also transformations determined by systems of linear differential equations. Regarding \mathfrak{R} as a group $(\mathfrak{R}, \mathfrak{F}[T])$ with T and the elements of \mathfrak{F} as operators, a ring of non-commutative polynomials $\mathfrak{F}[t]$ (Ore, this Zbl. **7**, 151) is introduced and an operator homeomorphism between $(\mathfrak{R}[t], \mathfrak{F}[t])$ and $(\mathfrak{R}, \mathfrak{F}[T])$ is established. By this means a theory of pseudo-linear transformations analogous to the theory of linear transformations

is obtained including conditions for the similarity of transformations. For cyclic transformations the ring of automorphisms is isomorphic with the invariant ring of the elementary divisor. In case \mathfrak{F} is commutative t may be chosen so that either $\bar{\alpha} = \alpha$ or $\alpha' = 0$.

Raudenbush (New Haven).

Nakayama, Tadas: Über die direkte Zerlegung einer Divisionsalgebra. Jap. J. Math. 12, 65—70 (1935).

The author considers algebras $A_i = (x_i, Z_i, S_i)$, where x_1, \dots, x_h are independent indeterminates over a field k , L_i is a cyclic field of degree n_i over k , $Z_i = L_i(x_1, \dots, x_h)$. Then A_i is cyclic of degree and exponent n_i over $K_h = k(x_1, \dots, x_h)$ and $A = A_1 \times \dots \times A_h$ is shown to be a division algebra. The author also proves the existence of a division algebra A with the above factorization into h factors of arbitrary degree n_i over K_{h-1} and uses his results to give a new proof of the existence theorem of R. Brauer, Tôhoku Math. J. 37, 77—87 (1933) (this Zbl. 7, 395).

Albert (Chicago).

Latimer, Claiborne G.: On the fundamental number of a rational generalized quaternion algebra. Duke math. J. 1, 433—435 (1935).

The canonical basis of Albert in the Bull. Amer. Math. Soc. 40, 164—176 (1934) (this Zbl. 8, 293) for any rational generalized quaternion algebra A contains two integers τ and σ . The integer τ is a prime restricted in terms of σ by four conditions and Latimer shows that τ may be chosen to be any prime satisfying these conditions. He also shows that σ is the fundamental number of A defined by Brandt, Math. Ann. 99, 9—12 (1928), and obtains the value of σ in terms of any given ordinary basis of A . This gives a unique canonical basis of A when he takes the least τ satisfying the four conditions.

Albert (Chicago).

Mahler, Kurt: Über Pseudobewertungen. Ia. (Zerlegungssätze.) Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 57—65 (1936).

Fortsetzung der in dies. Zbl. 13, 51 besprochenen Arbeit über Pseudobewertungen (abgekürzt P.B.). Es wird die loc. cit. aufgestellte Vermutung bewiesen, daß eine P.B. eines Ringes R , wenn überhaupt, dann nur auf eine Weise als direkte Summe endlich vieler irreduzibler P.B. darstellbar ist. Die P.B. W von R sei der direkten Summe der P.B. W_1, \dots, W_n äquivalent. Für jede „in W enthaltene“ P.B. W^* (siehe dafür loc. cit.) werden „Komponenten W_k^* i. B. a. W_k “ definiert: Wegen der Unabhängigkeit der W_i gibt es n Folgen $d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots; k = 1, 2, \dots, n$ aus R mit $\lim_{m \rightarrow \infty} W_h(d_m^{(k)} - \delta_{hk}) = 0$; $\delta_{hk} = 0$ für $h \neq k$, $\delta_{hh} = 1$. W_k wird durch $W_k(a) = \lim_{m \rightarrow \infty} W^*(ad_m^{(k)})$ gegeben. Die

W_k^* sind bis auf Äquivalenz durch Äquivalenzklassen von W^* und W_1, \dots, W_n eindeutig bestimmt. Die Eindeutigkeit der Zerlegung von P.B. in irreduzible folgt unmittelbar aus einem Satz, der alles Wesentliche über Komponenten enthält: Die in W enthaltene P.B. W^* sei der direkten Summe von $W^{*(1)}, \dots, W^{*(N)}$ äquivalent. $W_k^*, W_k^{*(K)}$ seien die Komponenten von $W^*, W^{*(K)}$ i. B. a. W_k . Dann gelten die folgenden direkten Summenzerlegungen

$$W^{*(K)} \sim \sum_{k=1}^n W_k^{*(K)}, \quad W^* \sim \sum_{k=1}^n W_k^*, \quad W \sim \sum_{k=1}^n \sum_{K=1}^N W_k^{*(K)}.$$

Mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes wird eine P.B. des Ringes aller Polynome mit rationalen Koeffizienten angegeben, die nicht als direkte Summe endlich vieler irreduzibler P.B. darstellbar ist, die daher die loc. cit. ausgesprochene Vermutung widerlegt, daß der Ring aller Polynome einer Unbestimmten mit Koeffizienten aus einem „elementaren“ Ring selbst „elementar“ sei.

Deuring (Leipzig).

Richter, Hans: Über die Lösbarkeit einiger nicht-Abelscher Einbettungsprobleme. Math. Ann. 112, 69—84 (1935).

Ist K_1 ein Normalkörper mit der Galoisschen Gruppe \mathfrak{G} über dem Grundkörper K_0 , ist \mathfrak{H} eine Gruppe, die eine invariante Untergruppe \mathfrak{N} mit $\mathfrak{H}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{G}$ enthält, so han-

delt es sich bei dem durch K_0 , K_1 , \mathfrak{S} und \mathfrak{N} bestimmten Einbettungsproblem um die Aufgabe, K_1 in einen Normalkörper K_2 mit der Gruppe \mathfrak{S} über K_0 derart einzubetten, daß K_1 zur Untergruppe \mathfrak{N} gehört. Ist speziell K_0 ein algebraischer Zahlkörper, sind $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ entsprechende Primideale von K_0, K_1, K_2 , und ist \bar{K}_v die \mathfrak{p}_v -adische Erweiterung von K_v , so ist \bar{K}_1 über \bar{K}_0 in \bar{K}_2 eingebettet. Die Galoissche Gruppe von \bar{K}_2 über \bar{K}_0 ist die Zerlegungsgruppe \mathfrak{Z}_2 von \mathfrak{p}_2 . Es ist $\mathfrak{Z}_2\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ zur Zerlegungsgruppe \mathfrak{Z}_1 des Primideals \mathfrak{p}_1 aus K_1 isomorph; der Teilkörper \bar{K}_1 von \bar{K}_2 gehört zur Untergruppe $(\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{N})$ von \mathfrak{Z}_2 . Unter einem dem oben formulierten Einbettungsproblem im großen entsprechenden Einbettungsproblem im kleinen wird die Aufgabe verstanden, bei gegebenem $K_0, K_1, \mathfrak{S}, \mathfrak{N}, \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1$ den Körper \bar{K}_1 über \bar{K}_0 in ein \bar{K}_2 mit einer Gruppe $\mathfrak{Z}_2 \subset \mathfrak{S}$ so einzubetten, daß \bar{K}_1 zur Untergruppe $(\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{N})$ gehört; \mathfrak{Z}_2 hat die Bedingung $\mathfrak{Z}_2\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{Z}_1$ zu erfüllen. Die Lösbarkeit des Einbettungsproblems im großen zieht also die des Einbettungsproblems im kleinen nach sich. Umgekehrt wird gezeigt: Enthält die Gruppe \mathfrak{S} eine im Zentrum liegende Abelsche Untergruppe vom Typ $(l_1^{m_1}, l_2^{m_2}, \dots, l_n^{m_n})$ und enthält K_0 alle $l_i^{m_i}$ -ten Einheitswurzeln, so läßt sich für einen Normalkörper K_1 mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ das Einbettungsproblem zu \mathfrak{S} lösen, wenn für alle Primideale aus K_0 wenigstens ein lokales Einbettungsproblem eine Lösung hat. Auch im Fall, daß K_0 nicht die Einheitswurzeln enthält, lassen sich Aussagen machen, die aber von speziellerer Natur sind. Als Grundlage für den Beweis dient einerseits eine Arbeit von R. Brauer [J. reine angew. Math. **168**, 44—64 (1932); dies. Zbl. **4**, 291], wo für beliebigen Grundkörper K_0 die Bedingung für die Lösbarkeit von Einbettungsproblemen bei gewissen Gruppen auf das Zerfallen normaler einfacher hyperkomplexer Systeme A zurückgeführt wird; andererseits eine Arbeit von H. Hasse [Math. Ann. **107**, 731—760 (1933); dies. Zbl. **6**, 152], wo bei algebraischem K_0 die Bedingung für das Zerfallen derartiger A gegeben wird. Als Anwendung wird die Einbettbarkeit eines quadratischen und eines biquadratischen Körpers in einen nicht-abelschen Normalkörper achten Grades genau untersucht. Dabei ergibt sich eine Vervollständigung von Ergebnissen von E. Rosenblüth [Mh. Math. Phys. **41**, 85—125 (1934); dies. Zbl. **9**, 392]. R. Brauer (Toronto).

Shoda, Kenjiro: Hyperkomplexe Bedeutung der invarianten Idealklassen relativ-galoisscher Zahlkörper. Jap. J. Math. **12**, 59—64 (1935).

K sei galoissch über k vom Grade n . \mathfrak{S} sei das beschränkte Produkt von K mit seiner Gruppe \mathfrak{G} , $\mathfrak{S} = u_E K + u_S K + \dots + u_T K$, mit dem Faktorensystem a_{ST} . Als Kern der die Hauptordnung \mathfrak{o} von K enthaltenden Maximalordnung \mathfrak{D} von \mathfrak{S} wird die größte in \mathfrak{D} enthaltene Ordnung der Form $u_E \mathfrak{o} + u_S \mathfrak{m}_S + \dots + u_T \mathfrak{m}_T$ bezeichnet, \mathfrak{m}_S Ideal in K . Es gibt im Hauptgebiet (vgl. E. Noether, dies. Zbl. **9**, 195) stets nur Πe_p -viele Maximalordnungen mit gleichem Kern, wobei das Produkt über alle Verzweigungsordnungen der zur Diskriminante von \mathfrak{S} primen Primideale von k zu bilden ist. Rechnet man zwei Maximalordnungen des Hauptgebietes zur selben Klasse, wenn sie durch Transformation mit Elementen aus K ineinander übergehen, führt man ferner mit Hilfe der Kerne geeignete Äquivalenzen zwischen diesen Klassen ein, so erhält man als Anzahlen der untereinander äquivalenten Klassen den Index der Gruppe der Ideale aus k enthaltenden Idealklassen von K in der Gruppe der invarianten Idealklassen von K bzw. der invariante Ideale enthaltenden Idealklassen.

Köthe (Münster i. W.).

Yang, K. C.: Quadratic fields without Euclid's algorithm. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A **3**, 261—264 (1935).

Verf. gibt ein Kriterium für die Nichtexistenz des Euklidischen Algorithmus in reell-quadratischen Körpern $k(\sqrt{p})$, wobei $p = 4n + 3$ eine Primzahl ist. — Leider sind diese schönen Untersuchungen stark durch eine Arbeit von E. Berg (dies. Zbl. **12**, 102—103) übertroffen, in welcher diese Frage für den Fall der Körper $k(\sqrt{m})$, wobei

$m > 0$ eine beliebig quadratfreie natürliche Zahl $\equiv 1 \pmod{4}$ ist, vollständig erledigt wurde.

N. Tschebotaröw (Kasan).

Hofreiter, Nikolaus: Quadratische Körper mit und ohne euklidischen Algorithmus. Mh. Math. Phys. 42, 397—400 (1935).

Nachdem E. Berg (dies. Zbl. 12, 102) die Frage nach dem euklidischen Algorithmus in reell-quadratischen Zahlkörpern $k(\sqrt{D})$ mit $D \equiv 1 \pmod{4}$ erledigt hatte, ist heute nur der Fall $D \equiv 1 \pmod{4}$ zu betrachten. — Der Verf. zeigt folgendes: 1. Der euklidische Algorithmus gilt im Falle $D \equiv 21 \pmod{24}$ nicht. 2. Er gilt für $k(\sqrt{77})$ nicht. 3. Wohl aber gilt er für $k(\sqrt{57})$.

N. Tschebotaröw (Kasan).

Lubelski, S.: Über Klassenzahlrelationen quadratischer Formen in quadratischen Körpern. J. reine angew. Math. 174, 160—184 (1936).

Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis des Satzes: „Es sei $K(\sqrt{-q})$, $q \neq 2$ Primzahl, ein imaginär-quadratischer Körper mit ungerader Klassenzahl, $D > 2$ eine natürliche Zahl, die für $q = 1$ größer als 12 ist und für welche $D' = \frac{D}{4}$ eine ganze durch keine Quadratzahl des Körpers $K(\sqrt{-q})$ teilbare Zahl ist; ferner sei h die Klassenzahl der binären quadratischen Formen der Determinante D , h' die Klassenzahl der binären quadratischen Formen der Determinante $-qD$ im Körper der rationalen Zahlen. Dann gilt: Die Klassenzahl H der binären quadratischen Formen der Determinante D , deren Koeffizienten ganze Zahlen des Körpers $K(\sqrt{-q})$ sind, ist $H = \frac{hh'}{2}$ für $q \geq 3$. Ist $q = 1$, so ist $H = hh'$ oder $2hh'$, je nachdem $x^2 - D'y^2 = -1$ in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist oder nicht.“ — Dieser Satz wird vom Verf. auf elementarem Wege bewiesen. Geht man aber von den Formenklassen zu den Idealklassen über, so ist dieser Satz eine spezielle Folge einer Formel von G. Herglotz [Math. Z. 12, 255—261 (1922)], die analytisch hergeleitet wurde. — Die Behauptung des Verf., daß aus der Herglotzschen Formel folgt, daß die Klassenzahl von $K(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \dots, \sqrt{m_k})$ durch das Produkt der Klassenzahlen von $K(\sqrt{m_i})$ teilbar ist, ist nicht korrekt. N. Tschebotaröw (Kasan).

Ingham, A. E.: A note on the distribution of primes. Acta Arithmet. 1, 201—211 (1936).

Es sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$, $\text{li } x$ der Integrallogarithmus; $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ die Riemannsche Zetafunktion, θ die obere Grenze ihrer Nullstellen im kritischen Streifen $0 \leq \sigma \leq 1$. — Verf. gibt eine neue Begründung für die Littlewoodsche Abschätzung

$$(1) \quad \pi(x) - \text{li } x = O_{\pm} \left(\frac{\sqrt{x}}{\log x} \log \log \log x \right)$$

und beweist ferner folgenden Satz: Falls θ erreicht wird, d. h. falls auf der Geraden $\sigma = \theta$ eine Nullstelle von $\zeta(s)$ liegt, so gibt es eine numerische Konstante $A > 1$, so daß für jedes $x \geq 2$ im Intervall (x, Ax) ein Paar ganzer Zahlen n, n' mit

$$(2) \quad \pi(n) - \text{li } n < 0, \quad \pi(n') - \text{li } n' > 0$$

liegt. Bezeichnet folglich $V(X)$ die Anzahl der Zeichenwechsel von $\pi(n) - \text{li } n$ im Intervall $(2, X)$, so ist

$$(3) \quad \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{V(X)}{\log X} > 0.$$

Insbesondere gelten die Behauptungen (2) und (3), wenn die Riemannsche Vermutung $\theta = \frac{1}{2}$ zutrifft. — Es gelingt Verf., seinen Beweis von (1) mit wesentlich einfacheren Hilfsmitteln durchzuführen, als es bisher (vgl. z. B. des Verf. Cambridge-Bändchen oder Landaus Vorlesungen über Zahlentheorie) geschah. Der Hauptteil der Überlegungen verläuft sogar im Reellen, indem mit dem Fejérkern $\left(\frac{\sin y/2}{y/2}\right)^2$ gearbeitet und die Anwendung der Phragmén-Lindelöfschen Sätze vermieden wird. Die hierbei benutzten Hilfsmittel aus der Primzahltheorie wurzeln allerdings im Komplexen. A. Walfisz.

Erdős, P.: On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers. *Acta Arithmet.* **1**, 197—200 (1936).

Es werden Mengen M ganzer Zahlen $0 \leq m_1 < m_2 < \dots$ betrachtet. Bezeichnet $f(M, n)$ die Anzahl der $m_i \leq n$, so sei $\delta(M)$ die untere Grenze der Zahlen $f(M, n)/n$ (die Dichte von M). In der vorliegenden Note beweist Verf. auf verblüffend einfache Art folgenden Satz: Es sei M_0 eine Menge der genannten Art, die mit Null beginnt und die Eigenschaft besitzt, daß jede nat. Zahl Summe von l gleichen oder verschiedenen Zahlen aus M_0 ist (man sagt, M_0 bilde eine Basis l -ter Ordnung für die natürlichen Zahlen), M eine beliebige Menge wachsender nat. Zahlen, $M + M_0$ die Gesamtheit aller Zahlen der Gestalt $m + m_0$, wo m in M und m_0 in M_0 liegt. Dann gilt

$$\delta(M + M_0) \geq \delta(M) + \frac{1}{2l} \delta(M) \{1 - \delta(M)\}. \quad A. Walfisz.$$

Heilbronn, Hans: Über das Waringsche Problem. *Acta Arithmet.* **1**, 212—221 (1936).

Es sei $k > 2$, k ganz, $G(k)$ die kleinste Zahl, so daß sich jede hinreichend große Zahl als Summe von höchstens $G(k)$ positiven k -ten Potenzen darstellen läßt. Heilbronn erhält aufs neue die wichtige Winogradoffsche Ungleichung

$$G(k) \leq 6k \log k + (4 + \log 216)k$$

(vgl. dies. Zbl. **10**, 391 u. **12**, 196) in der leicht verschärften Form

$$G(k) \leq 6k \log k + \left\{4 + 3 \log \left(3 + \frac{2}{k}\right)\right\} k + 3.$$

Wesentlich ist, daß es Verf. gelingt, die Winogradoffsche Methode ungemein zu vereinfachen. Unter Zuhilfenahme wohlbekannter Hardy-Littlewoodscher Sätze wird der Beweis mit allen Einzelheiten auf nur 8 Seiten durchgeführt, wobei die schwierigsten Winogradoffschen Rechnungen wegfallen.

A. Walfisz (Radość).

Gruppentheorie.

Suetuna, Zyoiti: Zerlegung der Charaktere einer Gruppe in die ihres Normalteilers. *Jap. J. Math.* **12**, 95—98 (1935).

Die endliche Gruppe \mathfrak{G} habe einen Normalteiler \mathfrak{H} mit abelscher Faktorgruppe. Zu jedem einfachen Charakter $\chi(g)$ von \mathfrak{G} gibt es zwischen \mathfrak{G} und \mathfrak{H} eine Gruppe \mathfrak{H}^* , so daß $\chi(h^*) = \sum_i \psi_i(h^*)$ mit gewissen verschiedenen einfachen Charakteren $\psi_i(h^*)$ von \mathfrak{H}^* gilt. Die Charaktere $\psi_i(h)$ von \mathfrak{H} bleiben einfach, jedoch fallen jeweils gleichviele von ihnen zusammen.

Ernst Witt (Göttingen).

Auerbach, H.: Sur les groupes linéaires bornés. III. *Studia Math.* **5**, 43—49 (1935).

If G is a continuous linear bounded connected non-commutative group of order v it is composed of a semi-simple unitary group G_1 and an abelian group G_2 . It is proved that almost every element of G is the product of a normal element of order l of G_1 and of a normal element of G_2 which is a generator of this group. The second theorem proved is that almost every couple of elements of G generate a denumerable subgroup which is everywhere dense. For open groups it is proved among other properties that a representation of such a group as a direct product is unique and that a necessary and sufficient condition that a linear continuous bounded and connected group be closed is that it admit a regular infinitesimal basis. (I. and II. see this Zbl. **8**, 338.)

M. S. Knebelman (Princeton).

MacDuffee, C. C.: Covariants of r -parameter groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **39**, 71—82 (1936).

Es sei $a' = f(a, \xi)$ eine r -gliedrige Transformationsgruppe in einem n -dimensionalen Gebiet. Das Produkt zweier Transformationen ξ und η möge durch $\zeta = g(\xi, \eta)$ gegeben werden. Dann sind durch

$$x' = g(\xi; x) \quad \text{und} \quad u' = g(u, \xi^{-1})$$

die erste und zweite Parametergruppe (nach Lie) gegeben. Eine Funktion $F(a; x)$ bzw. $F(a; u)$ heißt eine absolute Kovariante bzw. absolute Kontravariante der Gruppe, wenn

$$F(a; x) = F(a'; x') \quad \text{bzw.} \quad F(a; u) = F(a'; u')$$

ist. (Der Sprachgebrauch ist nicht in Übereinstimmung mit dem der klassischen Invariantentheorie; Ref.) Ist $F(a)$ eine beliebige Funktion und $G(a'; \xi)$ die transformierte Funktion, $F(a) = G(a'; \xi)$, so ist $G(a; x)$ eine Kovariante; jede Kovariante kann so aus einer „Quelle“ $F(a)$ erhalten werden. Jede Kovariante ist eine Funktion von n elementaren Kovarianten, deren Quellen die einzelnen Koordinaten a_1, \dots, a_n von a sind. Jedes invariante Gleichungssystem $F_r(a) = 0$ kann durch ein System von invarianten Gleichungen $G_r(a; x) \equiv 0$ (identisch in x) ersetzt werden. Relative Konkomitanten $F(a; x; u)$ vom Gewichte μ werden durch

$$F(a', x', u') = [J(a', a)]^\mu \cdot F(a; x; u); \quad J(a', a) = \frac{\partial a'}{\partial a_s} \Big|$$

definiert. Setzt man $J(a', a) = C(a', \xi) = D(a, \xi)$, so sind $C(a; x)$ und $D(a; u)$ relative Konkomitanten von den Gewichten 1 bzw. -1 , aus denen durch Potenzieren und Multiplikation mit absoluten Ko- bzw. Kontravar. alle rel. Ko- bzw. Kontravarianten erhalten werden können. Zum Schluß werden Anwendungen auf die projektive Invariantentheorie sowie auf Differentialinvarianten gegeben. van der Waerden.

Kampen, E. R. van: Note on a theorem of Pontrjagin. Amer. J. Math. 58, 177—180 (1936).

Ist F eine kompakte separable Gruppe, H eine abgeschlossene invariante Untergruppe von F , dann ist die Dimension von F die Summe der Dimensionen von H und von F/H . Ist die Dimension von F endlich, so ist jede hinreichend kleine Untergruppe 0-dimensional. Ist F im kleinen zusammenhängend, H eine im kleinen zusammenhängende, abgeschlossene invariante Untergruppe von F , so ist F/H endlich-dimensional. In diesem Satze ist der Satz von Pontrjagin [C. R. Acad. Sci., Paris 198, 238 (1934); dies. Zbl. 8, 246] enthalten, daß jede im kleinen zusammenhängende, endlich-dimensionale, kompakte, separable Gruppe eine Lie-Gruppe ist. Reinhold Baer (Princeton).

Coble, Arthur B.: Collineation groups in a finite space with a linear and a quadratic invariant. Amer. J. Math. 58, 15—34 (1936).

Der Ursprungsgedanke der vorliegenden Untersuchung ist in der Gruppe linearer Transformationen zu suchen, die in der Theorie der regulären Cremonaschen Verwandtschaften vorkommt; es handelt sich um lineare Transformationen mit ganzzahligen Koeffizienten, die eine lineare und eine quadratische Invariante besitzen (s. A. B. Coble, Algebraic Geometry and theta Functions, S. 39—41). Hier aber werden alle ganzen Zahlen, die man betrachtet, in bezug auf eine gegebene Primzahl $p > 2$ reduziert; man wird so zur Untersuchung der endlichen Gruppe Γ linearer Transformationen in einem endlichen Raume geführt, die eine quadratische und eine lineare Invariante, Q und L , besitzen. Die Arbeit ist in drei Teile geteilt. Im 1. Teil untersucht Verf. eine quadratische Form $Q(n) \equiv \lambda_0 x_0^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ in einem Galois'schen Feld $[s = p^m]$, wo p eine Primzahl > 2 bedeutet: zunächst einige kanonische Formen für Q , die keine Quadratsummen sind (s. L. E. Dickson, Linear Groups, Chap. VII); dann die Erklärung und Aufzählung der äußeren und inneren Punkte von Q und der Punkte, die auf Q liegen (sie sind bzw. die Punkte x , für die $Q(n)$ ein Quadrat oder kein Quadrat oder Null ist); und dann weiter die Untersuchung der Geraden, die mit Q bzw. 0, 1, 2 oder mehr als 2 Punkte gemein haben, und die Aufzählung der Punkte, die sie enthalten. Im 2. Teil wird die Ordnung $N(n)$ von Γ bestimmt und die Untergruppe von Γ untersucht, die von den in Γ enthaltenen involutorischen Homologien erzeugt wird; ist n gerade, so fällt diese Untergruppe mit Γ zusammen; ist n ungerade, so ist sie dagegen die invariante Untergruppe der Ordnung $\frac{1}{2} N$, die die äußeren und inneren Punkte von Q miteinander nicht vertauscht; die Zusammensetzung von Γ wird ebenfalls diskutiert. Im 3. Teil wird eine lineare In-

variante L eingeführt und die so entstehende Untergruppe von Γ untersucht, je nachdem der Pol von $L = 0$ in bezug auf $Q = 0$ auf Q liegt oder ein äußerer oder ein innerer Punkt von Q ist. Über weitere Einzelheiten ist es nicht möglich, hier zu referieren.

E. G. Togliatti (Genova).

Schreier, J.: Über die Drehungsgruppe im Hilbertschen Raum. *Studia Math.* 5, 107—110 (1935).

Using a theorem of Schreier and Ulam on permutation groups [*Studia Math.* 4, 134—141 (1933); this Zbl. 8, 200], the author shows that the group \mathfrak{G} of all unitary transformations in real Hilbert space contains four transformations generating a set which is everywhere dense in \mathfrak{G} in the sense of the weak topology defined by putting $\lim U_n = U$ when $|U_n(x) - U(x)| \rightarrow 0$ for every x in the given Hilbert space. *Stone.*

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Sierpiński, W.: Sur une propriété des ensembles dénombrables denses dans un intervalle. *Mathematica, Cluj* 11, 222—228 (1935).

If E and H are two linear sets we say that the set H is smaller (N), in the sense of John von Neumann (*Fundamenta* 13, 85), than the set E if there is a function $f(x)$ defined on E which transforms E into H biunivocally such that

$$|f(x) - f(x)| < |x - y| \quad x \text{ in } E, y \text{ in } E, x \neq y.$$

This relation is expressed by the notation $H <_f E$. — If E and H are subsets of the

interiors of intervals (a, b) , (c, d) respectively, with $b - a > d - c > 0$, E is dense in (a, b) , H is dense in (c, d) , then H is smaller (N) than E . There is a function f such that $(c, d) <_f (a, b)$ and $H <_f E$. A set H is smaller (N) by finite decomposition than E if there exist finite decompositions

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n, \quad H = H_1 + H_2 + \dots + H_n,$$

such that for $i = 1, 2, \dots, n$, the set H_i is smaller (N) than E_i . If (a, b) , (c, d) are two finite open intervals and E, H are two countable sets such that E is dense in (a, b) and H is dense in (c, d) , then H is smaller (N) than E by finite decomposition.

E. W. Chittenden (Princeton).

Sierpiński, W.: Sur la structure des fonctions univalentes. *C. R. Soc. Sci. Varsovie* 28, 1—4 (1935).

The author demonstrates the following propositions regarding the structure of univalent (of distinct values) functions. Every univalent function defined on an arbitrary set E and taking only values in E determines a unique decomposition of the set E into an infinite series of disjointed sets which may be null, $E = E_0 + E_1 + E_2 + \dots$ such that $f(E_0) = E_0$, and $f(E_n) = f(E_{n+1})$, for $n = 1, 2, \dots$. In fact, $E_0 = \pi f^n(E)$, and $E_n = f^{n-1}(E) - f^n(E)$ $n = 1, 2, \dots$. If E is the set of real numbers and f is measurable, the sets E_n need not be measurable. If f is a Baire function, the sets E will be Baire sets, and measurable B . If f is a biunivocal transformation of an arbitrary set E into itself, E is a sum of a countable set of disjointed sets H such that $f(H) = H$.

Chittenden (Princeton).

Jarník, V., et V. Kníchal: Sur les superpositions des fonctions continues non décroissantes. *Fundam. Math.* 25, 190—197 (1935).

Let A be the set of all functions $f(x)$ which are defined and continuous in the closed interval $I = (0, 1)$ with values in I . Let B be the set of all non-decreasing functions in A , let C be the set of all increasing functions in A . The authors obtain results for the classes B and C which correspond to those previously obtained for the class A (*Fundamenta* 24, 206—208; this Zbl. 11, 106). If $f(x)$ is a function of

class B there are three functions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ of B such that for every $\delta > 0$ there is a function $p(x)$ such that p is a finite superposition of $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ and

$$|f(x) - p(x)| < \delta, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

If $f_1(x), f_2(x), \dots$ is a given sequence of functions of B there are three functions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ of B of which each $f_n(x)$ is a finite superposition. The number of functions cannot be reduced to two. The corresponding problem is not solved for the class C , but is for the class B_1 of all functions of B which have a finite derivative on the right for $0 \leq x < 1$, and a finite derivative on the left for $0 < x \leq 1$. The statement made for class B holds for class B_1 . For the corresponding class C_1 , there is a sequence $f_1(x), f_2(x), \dots$ of functions of C such that there is no finite system $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, of functions of C whose superpositions include all functions $f_n(x)$. Put $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x$, for $0 \leq x \leq 1$. Then, if $g(x), h(x)$, are any two functions of B , there is $\delta = \delta(g, h) > 0$ and an index $i = i(g, h)$, ($i = 1, 2, 3$) such that

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |p(x) - f_i(x)| \geq \delta > 0$$

for each function $p(x)$ which is a finite superposition of $g(x), h(x)$. *E. W. Chittenden.*

Roger, Frédéric: Sur l'extension à la structure locale des ensembles cartésiens les plus généraux, des théorèmes de M. Denjoy sur les nombres dérivés des fonctions continues. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 377—380 (1936).

Einige bekannte Sätze über approximative Derivierte u. dgl. werden geometrisch formuliert; vgl. auch dies. Zbl. **11**, 365 u. **12**, 368. *W. Feller* (Stockholm).

Blumberg, Henry: The measurable boundaries of an arbitrary function. *Acta math.* **65**, 263—282 (1935).

Every non-measurable set S of Euclidean n -space admits a decomposition $S = M + N$ into a measurable subset M and a non-measurable subset N such that at every point of N the metric density of both N and the complement of N is one; this decomposition is unique if we neglect sets of measure zero. Let $y = f(x)$ be a given real function such that for every x there corresponds at least one value of y . It is assumed, for convenience only, that $f(x)$ is bounded. A point (x', y') of the xy -plane is fully approached by the curve $y = f(x)$ if for every $\varepsilon > 0$ the set $E_{y'\varepsilon} = E_{|f(x) - y'| < \varepsilon}$, the set of values of x for which there is at least one value of $f(x)$ such that $|f(x) - y'| < \varepsilon$ is of metric density one at x' . If an ε exists such that $E_{y'\varepsilon}$ is of metric density zero at x' , the point (x', y') is vanishingly approached by the curve $y = f(x)$. If the point (x', y') is not vanishingly approached, it is positively approached. The set of points x' for which a y' exists such that (x', y') is positively but not fully approached by $y = f(x)$ is of measure zero. The terms metrical upper and lower semi-continuity are introduced and it is shown that the metrical upper boundary is everywhere metrically upper-semi-continuous. The metrical boundary and saltus functions are measurable. A necessary and sufficient condition that a function be a metrical upper boundary is that it be identical to its metrical upper boundary. A necessary and sufficient condition that $f(x)$ be a metrical upper boundary is that f be everywhere metrically upper-semi-continuous and that $y = f(x)$ approach all of its points positively. Metrical lower boundaries have a similar characterization. If $u(x), l(x)$ are two given functions which are metrically upper and lower semi-continuous respectively, and $y = u(x), l(x)$, respectively approach every point $(x, u(x)), (x, l(x))$, positively, and $u(x) \geq l(x)$, then there is a function $f(x)$ having these functions for its metrical upper and lower boundaries. From these results it is easy to obtain theorems on polynomial approximation to the upper and lower boundary functions and also relations between these functions and functions of Baire's second class (at most). For every function $f(x)$ defined in an interval (a, b) , there is for every positive ε , a measurable subset M of (a, b) of measure $b - a - \varepsilon$ such that for every x of M , $u(x)$ and $l(x)$ are equal respectively to the ordinary upper and lower boundaries of $f(x)$ at x on the understanding that these four numbers are computed with respect to M only ε cannot be zero. The Lebesgue

upper (lower) integral of a bounded one-valued function equals the Lebesgue integral of the metrical upper (lower) boundary functions associated with $f(x)$. If $f(x)$ is a given function, there exists a function $g(x)$ of Baire's second class at most such that for every positive ε the set of points where $g(x)$ differs from $f(x)$ by more than ε is of interior measure zero. A theorem of Denjoy, extended to an unrestricted real function by Saks and Banach, relating to derivatives can be deduced from the preceding results. The measurable boundary functions provide a basis for the introduction of a metric, and the extension of a condition given by Arzela for the compactness of a sequence of functions. The memoir closes with a discussion of other boundary functions.

E. W. Chittenden (Princeton).

Kantorovitch, L.: Sur un espace des fonctions à variation bornée et la différentiation d'une série terme à terme. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1457—1460 (1935).

Une suite de fonctions sommables $f_n(t)$ converge (β) vers une fonction $f(t)$, quand les $f_n(t)$ convergent vers $f(t)$ presque partout et qu'il existe une fonction sommable $F(t)$ telle que $|f_n(t)| \leq F(t)$ ($n = 1, 2, \dots$). Une suite de fonctions à variation bornée $y_n(t)$ converge (α) vers une fonction $y(t)$ quand les $y_n(t)$ convergent vers $y(t)$ en chaque point et qu'il existe, quel que soit $\varepsilon > 0$, une fonction croissante $\omega_\varepsilon(t)$, $|\omega_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$ et un nombre N_ε telles que $|y_n(t'') - y_n(t')| \leq \omega_\varepsilon(t'') - \omega_\varepsilon(t')$ pour $n \geq N_\varepsilon$ et $t'' > t'$ arbitraires. En utilisant ces définitions l'auteur démontre: Théorème I. Soit $y_n(t)$ une suite de fonctions absolument continues avec $y_n(a) = 0$. Pour que la suite des fonctions dérivées $y'_n(t)$ converge (β) vers une fonction sommable $y'_0(t)$ il faut et il suffit que la suite $y_n(t)$ converge (α) vers $y_0(t)$. Théorème II. Soit $y_n(t)$ une suite des fonctions à variation bornée qui converge (α) vers une fonction $y_0(t)$. Alors la suite des fonctions $y'_n(t)$ converge (β) vers $y'_0(t)$. Ces deux théorèmes ainsi que quelques autres énoncés par l'auteur se trouvent en relations étroites avec la théorie générale des espaces partiellement ordonnés de l'auteur [voir une Note de l'auteur dans C. R. Acad. Sci. URSS **4**, 13—16 (1935); ce Zbl. **13**, 168]. *A. Kolmogoroff.*

Appert, Antoine: Nouvelle remarque sur le maximum des fonctionnelles semi-continues. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 813—815 (1935).

In a space (V) satisfying the conditions: $\overline{E + F} \leq \overline{E} + \overline{F}$; $\overline{E} = E$, if E contains but one element, the following three classes of sets coincide: C) the class of all sets E such that every countably infinite subset A of E determines a point a of E such that every neighborhood V of a contains infinitely many points of A ; D) the class of all sets E such that there exists for each monotone and countable family of subsets A of E an element of E which is common to the closures \overline{A} of all sets of the family; S) the class of all sets E such that each real finite upper-semi-continuous function on E is bounded above on E and attains its least upper bound. The closure \overline{E} of E is defined by the formula $\overline{E} = E + E'$, where E' is the set of all neighborhood points of accumulation of E .

Chittenden (Princeton).

Appert, Antoine: Sur l'extension aux espaces (V) les plus généraux des propriétés simples des espaces (V) vérifiant la condition $\overline{E} = E$. Mathematica, Cluj **11**, 23 bis 31 (1935).

The author has shown elsewhere (Propriétés des espaces abstraits les plus généraux. 2 Vol. Paris: Hermann 1934; this Zbl. **10**, 117) that the spaces (V) verifying the condition α) If $\overline{E} = E + E'$, then $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$, possess a number of important properties which do not extend to the most general spaces (V) . He offers a solution of the following problem: To replace the definitions given previously for spaces (V) by others which are equivalent to the originals in spaces (V) satisfying the conditions α), such that the properties of the spaces satisfying the condition α) extend to the most general spaces (V) . An open set in a space (V) is a set O which contains a neighborhood V of each of its points. The desired solution is obtained by considering the space whose neighborhoods are the open sets of the space (V) . *E. W. Chittenden (Princeton).*

Appert, Antoine: Sur quelques notions susceptibles d'être prises comme terme primitif dans la théorie des espaces abstraits. *Mathematica*, Cluj **11**, 229—246 (1935).

The author considers the consequences of using one of the following notions as a basis for the definition of a space: closure, \bar{E} , subject to the conditions $E \leq \bar{E}$, $\bar{0} = 0$, where 0 denotes the null set; interior. The derived set E' of a set E is defined in terms of closure by the rule: x belongs to E' if and only if it belongs to $E - x$. Then under the restrictions imposed above, $E = E + E'$. The space of the operator E' satisfies the condition x belongs to E' is equivalent to: $E - x$ is non null and x belongs to $(E - x)'$. The spaces (V) of Fréchet are those for which (III) $E \leq \bar{E} + \bar{F}$. The accessible spaces of Fréchet are those for which \bar{E} has properties I, II, III, and the additional properties: (IV) $\bar{E} + \bar{F} \leq \bar{E} + \bar{F}$; (V) If a set E has one and only one element, $\bar{E} = E$, and α). Cf. the prec. abstr. If we denote the interior of a set E by iE , the following formulas express a fundamental set of properties of the concept: (I') $iE \leq E$; (II') $iS = S$, where S is the entire space; (III') $iEF \leq iE$; (IV') $iEiF \leq iEF$; (V') If a set E is obtained by removing from the space a single point, then $iE = E$; α') $iiE = iE$. The notions closure and interior are equivalent, and the six primed properties are equivalent to the unprimed properties. In an appendix attention is called to a method of extending the properties of spaces (V) to more general topological spaces. These methods were discussed by E. W. Chittenden, On general topology, etc. *Trans. Amer. Math. Soc.* **31**, 290—321. *E. W. Chittenden.*

Dunford, Nelson: Corrections to the paper „Integration in general analysis“. *Trans. Amer. Math. Soc.* **38**, 600—601 (1935).

Es handelt sich weniger um Berichtigungen als um Ausfüllung einiger Lücken in der Arbeit des Verf. über die Lebesguesche Integrationstheorie von Funktionen auf allgemeinen Maßräumen und Werten aus abstrakten Vektorräumen; dies. Zbl. **11**, 341. *Bochner (Princeton).*

Bourbaki, Nicolas: Sur un théorème de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques. *C. R. Acad. Sci., Paris* **201**, 1309—1311 (1935).

By the well known theorem all open sets in a metric space are measurable with respect to any measure in the sense of Carathéodory (cf. e.g. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen* Bd. 1, p. 430. Berlin 1921). The paper contains a generalization of that result. Let namely E be an abstract topological space with a measure $\mu(X)$ such that $\mu(X)$ is defined and non negative for any set X in E and $\mu(\sum_n E_n) \leq \sum_n \mu(E_n)$ for any sequence $\{E_n\}$ of sets in E . The author establishes the equivalence of the following two conditions: (I) $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$, whenever A and B are sets in E and there exists a continuous function in E , assuming the constant values 1 and 0 over A and B respectively, (II) any continuous function $f(x)$ in E has the property of Carathéodory, i. e. $\mu(X + Y) = \mu(X) + \mu(Y)$, whenever there is a number α such that $f(x) \leq \alpha$ over X and $f(x) > \alpha$ over Y . *Saks (Warszawa).*

Analysis.

Andruetto, Giacinta: Relazioni tra volumi e superficie di rotazione intorno ad assi paralleli. *Boll. Un. Mat. Ital.* **15**, 14—17 (1936).

Denjoy, Arnaud: Sur les fractions continues. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 371—374 (1936).

Die Note bringt einige neue Ergebnisse über die metrischen Eigenschaften der Kettenbrüche, von denen hier folgende wichtige Abschätzungen erwähnt seien: 1. $a_0 = 0$, a_1, \dots, a_n, \dots seien die Teilnenner der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung einer zwischen 0 und 1 liegenden Zahl θ ; $\varphi(n)$ sei eine positive zunehmende Funk-

tion, $\int^n d\lambda/\varphi(\lambda) = \lg \lambda(n)$ sei divergent und $\sigma(n)$ die zu $\lambda(n)$ inverse Funktion; dann gibt es für fast alle θ bei jedem $n > n_0(\theta)$ ein m mit $n < m < n\sigma\{\lambda(n) \lg^\alpha \lambda(n)\}$, $a_m > \varphi(m)$, wenn $\alpha > 1$ ist; bei $2\alpha < 1$ wird die Behauptung für fast alle θ hinfällig. — 2. Ist $a_M \geq a_{M_1} \geq \dots \geq a_{M_{q-1}} \geq \dots \geq a_{M_{n-1}}$ die nach abnehmender Größe geordnete Reihe a_1, a_2, \dots, a_n , so gilt bei jedem $\varepsilon > 0$ für fast alle θ die Ungleichung

$$a_{M_{q-1}} < n \lg^{1+\varepsilon} n$$

für alle $n > n_0(\theta, \varepsilon, q)$; es lassen sich noch schärfere Ungleichungen derselben Art angeben. — Mehrere sinnstörende Druckfehler. *A. Khintchine* (Saratow).

Denjoy, Arnaud: Sur une formule de Gauss. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 537—540 (1936).

Ist $(0, a_1, a_2, \dots, a_n + \xi_{n+1})$ ($0 < \xi_{n+1} < 1$) die regelmäßige Kettenbruchentwicklung einer Irrationalzahl α , so hat bekanntlich Gauß die Behauptung ausgesprochen, daß das Maß der Menge der zwischen 0 und 1 liegenden, der Ungleichung $0 < \xi_{n+1} < x$ genügenden Zahlen α bei $n \rightarrow \infty$ gegen $\lg(1+x)/\lg 2$ strebt. Für diese schon von Kuzmin [Atti del congr. int. Bologna **6**, 83 (1928)] und P. Lévy [Bull. Soc. Math. France **57**, 178 (1929)] bewiesene Behauptung bringt vorliegende Note einen Neubeweis, der sich als sehr verallgemeinerungsfähig erweist. Nicht nur findet Verf. die entsprechende Lösung für den Fall, daß α zwischen 0 und t ($t > 0$) eingeschlossen ist (der zugehörige Grenzwert ist $t \lg(1+x)/\lg 2$), sondern er stellt auch allgemeinere Formeln auf, die z. B. erlauben, die analogen Probleme für solche Komplexe von Bedingungen wie $(\xi_n < x, \xi_{n+1} < y)$ zu lösen. *A. Khintchine* (Saratow).

Wigert, S.: Sur l'inégalité $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$. Ark. Mat. Astron. Fys. **25 B**, Nr 11, 1—2 (1936).

Kurzer Induktionsbeweis, der jedoch schon bekannt ist (vgl. Hardy-Littlewood-Pólya, Inequalities, 20—21, Beweis IV). *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Szűcs, Adolf: Sur la source commune de certaines inégalités remarquables. Mat. fiz. Lap. **42**, 127—133 u. franz. Zusammenfassung 133 (1935) [Ungarisch].

Let $\{a_\nu\}$ and $\{b_\nu\}$ be two sets of n real numbers. Considering all the permutations $\{b_{i_\nu}\}$ of $\{b_\nu\}$, the sum $\sum_{\nu=1}^n a_\nu b_{i_\nu}$ obtains its greatest resp. smallest value if the b 's are so ordered that $(a_\mu - a_\nu)(b_\mu - b_\nu) \geq 0$ resp. ≤ 0 holds for all values of μ and ν . From this general principle various classical inequalities like the theorem of arithmetic and geometric means, Tchebycheff's inequality etc. can be derived easily. *G. Szegő*.

San Juan, R.: Über ein Problem von Carleman. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **10**, 265—267 (1935).

Le problème de M. Carleman s'énonce ainsi: les conditions: $f_1^{(n)}(0) = f_2^{(n)}(0)$, $\text{Max } |f_1^{(n)}(x)| = A_n$, $\text{Max } |f_2^{(n)}(x)| = A'_n$ ($n=0, 1, \dots; 0 \leq x \leq 1$), $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}} = \sum \frac{1}{\sqrt[n]{A'_n}} = \infty$ entraînent-elles le fait que $f_1(x) = f_2(x)$ ($0 \leq x \leq 1$)? L'A. aurait construit une fonction $\varphi(x)$ telle que $(1) |\varphi^{(n)}(x)| < \min(A_n, A'_n)$ ($n=0, 1, \dots; 0 \leq x \leq 1$). Son travail n'étant qu'un résumé nous n'avons pas pu suivre ses idées. Nous ne savons pas si $\varphi^{(n)}(0) = f_1^{(n)}(0) = f_2^{(n)}(0)$ ($n=0, 1, \dots$) (et alors la réponse à la question de M. Carleman serait affirmative), ou si l'on exige seulement de $\varphi(x)$ de vérifier (1), ce qui est immédiatement réalisable (sans même que $\varphi(x)$ soit un polynome).

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Geronimus, J.: On some extremal properties of trigonometric polynomials with real roots. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 924—930 (1935).

Let consider the set of all trigonometric polynomials of the form

$$\sum_{k=0}^{m-1} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) + \cos m\theta$$

with only real roots. If λ is a fixed non negative number, the maximum of $\lambda A_0^2 + \sum_{k=1}^{m-1} (A_k^2 + B_k^2)$ is determined. It is attained if the roots are all real and equal. The case $\lambda = 1$ has been investigated by Blumenthal [Math. Ann. **77**, 390 (1916)].

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Favard, J.: Sur une propriété extrême de l'intégrale d'une fonction périodique. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 273—276 (1936).

Der Verf. gibt einen sehr interessanten Beweis eines Satzes über die Integration eines trigonometrischen Polynoms, den Bohr, in Zusammenhang mit einem älteren Satz von ihm, neulich bewiesen hat (dies. Zbl. **12**, 347). Während der Bohrsche Beweis funktionentheoretische Hilfsmittel benutzte, verläuft der Beweis des Verf. im Reellen. Der Satz wird sehr einfach aus dem folgenden Satz abgeleitet: Es sei $f(x)$ eine stetige, periodische Funktion der Periode 2π , deren Fourierkoeffizienten bis zur Ordnung n exkl. verschwinden und für den $|f(x)| \leq M$; dann gilt für dasjenige Integral $F(x)$ von $f(x)$, deren Mittelwert verschwindet, die Ungleichung $|F(x)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{M}{n}$, und die Konstante ist die bestmögliche. Zum Beweis wird benutzt, daß bei beliebigen A_k das betreffende Integral durch

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t-\pi) \left[t - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \sin kt \right] dt$$

gegeben ist, woraus folgt

$$|F(x)| \leq \frac{M}{\pi} \int_0^{\pi} \left| t - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \sin kt \right| dt.$$

Bestimmung des Minimums des Integrals auf der rechten Seite liefert den Satz. Es wird bemerkt, daß die entwickelte Methode zur Verschärfung von Ungleichungen von S. Bernstein (dies. Zbl. **11**, 396) dienen kann. In einer gleichzeitig erschienenen Arbeit hat Bohr den zitierten Satz aus seinem früheren Satz abgeleitet (dies. Zbl. **13**, 110).

B. Jessen (Kopenhagen).

Verblunsky, S.: On positive harmonic functions. II. Proc. London Math. Soc., II. s. **40**, 290—320 (1935).

This is a continuation of a previous paper (this Zbl. **10**, 162) on positive harmonic functions (= p. h. f.)

$$1 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n \quad (0 \leq r < 1) \quad (1)$$

$$(2c_n = a_n - ib_n),$$

where the c_n can be represented in terms of independent complex parameters $z_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$, with $\rho_n^2 \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$). This paper again deals with the class P_n of functions (n) (that is, $z_{n+1} = z_{n+2} = \dots = 0$, l. c.). The author shows that if all $|z_i| < 1$ ($i \leq n$),

then the series $1 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ is the reciprocal of a positive trigonometric polynomial, of order $\leq n$; and conversely: $T(x)$ being such a polynomial, of order n , the Poisson function (1) of

$$f(x) = \frac{c}{T(x)} \equiv 1 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (c > 0)$$

is of class P_n . This leads to a new parametric representation of positive trigonometric polynomials. — A closer study of the class P_2 further yields necessary and sufficient conditions for the existence of a solution of the integral equation in t

$$\int_0^{2\pi} \log \{t + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \alpha_2 \cos 2x + \beta_2 \sin 2x\} dx = 0 \quad (\alpha_i, \beta_i \text{ given})$$

and the form of the solution.

J. Shohat (Philadelphia).

Verblunsky, S.: On positive harmonic functions in a half-plane. Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 482—507 (1935).

The object of this paper is to obtain an integral representation of a harmonic function $J(\xi, \eta)$, which is positive in the half-plane $\eta > 0$. By means of the mapping $re^{i\theta} = -\frac{\xi-i}{\xi+i}$ we obtain $J(\xi, \eta) \equiv H(r, \theta)$ — harmonic in the unit-circle, and we can use the Abel-Poisson Summation Theory of Fourier Series in order to establish the fundamental Theorem I:

$$J(\xi, \eta) = d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(1+x^2)}{\eta^2 + (x-\xi)^2} dG(x) \quad (1)$$

$d - \text{const.} \geq 0$; $G(x)$ — bounded, non-decreasing. The author further investigates the possibility of the more special representation

$$J(\xi, \eta) = \int_0^{\infty} e^{-\eta t} \{A(t) \cos \xi t + B(t) \sin \xi t\} dt,$$

and the nature of the functions $A(t)$, $B(t)$. Here an important role is being played by the constants

$$\alpha_n = \int_{n-1}^n (1+x^2) dG(x) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$a_n = \int_{n-1}^n (1+x^2) dH(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$H(0) = 0, \quad H(x) \equiv G(x) - G(-x) \quad (x > 0).$$

Illustration. If $d = 0$ in (1), then $\int_{-\infty}^{\infty} J^k(\xi, 1) d\xi < \infty$ (k positive integer) if and only if $\sum \alpha_n^k$ converges. — The paper closes with a study of the asymptotic behavior of $J(0, \eta)$, as $\eta \rightarrow \infty$, in particular, of the existence of $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta^\delta J(0, \eta)$ ($0 \leq \delta < 1$), also of the integrability of $\eta^\sigma J^p(0, \eta)$ ($\sigma = 0, p - 2$; $p \geq 1$) in $(1, \infty)$. *J. Shohat.*

● **Ser, J.:** La réduction des séries alternées divergentes et ses applications. Paris: Gauthier-Villars 1935. VI, 43 pag. Frs. 12.—

The author exploits in detail the formal reciprocity [see this Zbl. 8, 152 (1934)] between the two sequences of values, $\{f(r)\}$ and $\{f_r\}$, where in the customary notation (not used by the author), $f_r = (-1)^r \Delta^r f(0)$. The formal properties of Newton's Interpolation formula are used to interpret divergent sequences by means of this reciprocity, and of artifices dependent thereon. The integral used by Borel in his exponential method of summation, and various types of factorial series recur in the work. Questions concerning the scope of the method are not discussed. *A. A. Bennett* (Providence).

Wegner, Udo: Zur Theorie der Interpolation. Deutsche Math. **1**, 103—107 (1936).

The error in Lagrange interpolation formula can be represented in the form

$$\int_a^b K_r(z, t) f^{(r)}(t) dt.$$

Here r is an integer not surpassing the number n of the interpolation points. The kernel K_r is independent of the given function $f(t)$; it can be calculated from the fundamental polynomials of the interpolation by means of Bernoulli polynomials. Integrating this formula with respect to z a formula of Wirtinger (this Zbl. 6, 361) arises. In the case $r = n$ the kernel obtains a particularly simple form. *G. Szegö.*

Steffensen, J. F.: On the sum or integral of the product of two functions. II. Skand. Aktuarie Tidskr. **18**, 242—269 (1935).

This paper develops in elegant form for the most part known results in the problem of expressing the sum of the product of two functions in Tchebycheff and Legendre Moments of the functions. But he does on introducing polynomials of which the

Tchebychef and Legendre polynomials are only special cases, obtain generalized formulae which contain the results for both summation and integration in the one expression. The results of further generalization by the introduction of a weight function and the use of Stieltjes integration are indicated. *C. C. Craig* (Ann Arbor).

Tricomi, Francesco: Trasformazioni funzionali e polinomi ortogonali, in ispecie sferici. Boll. Un. Mat. Ital. **14**, 213—218 u. 277—282 (1935).

The author observes that the transformation $f(s) = J(F) \equiv \int_{-1}^s (s-t)^{-1/2} F(t) dt$ being applied to $P_n(t)$, the n -th Legendre polynomial, transforms it into

$$2^{1/2}(n+1/2)^{-1} \cos[(n+1/2) \arccos x].$$

He introduces also a more general transformation $J^\alpha(F)$ which is obtained from $J(F)$ by replacing $(s-t)^{-1/2}$ by $(s-t)^{-\frac{1}{2}-\alpha}$, and derives some properties of this transformation, without noticing that the transformations in question are immediately expressible in terms of integration of fractional order. As an application the author derives some formulas transforming Legendre series into trigonometric series. Thus he obtains the following relation which apparently is new,

$$K(\sin \alpha) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-1} P_n(\cos 2\alpha) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1 \cdot 2 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \right\}^2 \sin(4n+1)\alpha, \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

where $K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{-1/2} d\psi$. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Doetsch, Gustav: Integration von Differentialgleichungen vermittle der endlichen Fourier-Transformation. Math. Ann. **112**, 52—68 (1935).

This paper is closely connected with the author's earlier work on resultants („Faltungen“) and on the equation of heat conduction. The finite Fourier transform $\{f\{G\}$ is simply the sequence of Fourier coefficients

$$\{f\{G\} \equiv g(n) = \int_{-l}^l e^{-in\pi x/l} G(x) dx.$$

The author recalls the formulas for the Fourier coefficients of the resultant of two functions and of the derivatives of a function, and proceeds to apply this simple machinery to the boundary value problem for the equation of heat conduction relative to the domain $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$. The finite Fourier transformation translates the partial differential equation plus boundary conditions into an ordinary linear differential equation plus initial value conditions. The resulting solution is of course the classical one. The method leads to transcendental addition theorems for the various Green's functions of the problem which imply corresponding theorems for theta functions, the prototype of which was discovered by F. Bernstein and the author. As a particular instance may be quoted the elegant formula

$$\vartheta_3(v, \tau_1 + \tau_2) = \int_{-1/2}^{1/2} \vartheta_3(v - u, \tau_1) \vartheta_3(u, \tau_2) du.$$

E. Hille (New Haven, Conn.).

Wintner, Aurel: On a class of Fourier transforms. Amer. J. Math. **58**, 45—90 (1936).

Eine Verteilungsfunktion $\sigma = \sigma(x)$, $-\infty < x < +\infty$, heißt symmetrisch, wenn $\sigma(x) = 1 - \sigma(-x)$, und konvex, wenn außerdem $\sigma(x)$ für $0 < x < +\infty$ konkav (und also für $-\infty < x < 0$ konvex) ist; ein konvexes σ ist höchstens für $x = 0$ unstetig. Die Faltung $\sigma = \sigma_1 * \sigma_2$ sowie der Limes $\sigma = \lim \sigma_n$ von zwei bzw. einer Folge konvexer Verteilungsfunktionen ist wieder konvex. Ein Teil der Arbeit handelt von gewissen analytischen Funktionen, von denen gezeigt wird, daß sie Fourierintegrale $L(t; \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} d\sigma(x)$ von konvexen Verteilungsfunktionen sind. Die Beweise beruhen darauf, daß auf Grund einer Produktdarstellung der Funktion das zugehörige σ explizit in der Form einer unendlichen Faltung

$\sigma = \sigma_1 * \sigma_2 * \dots$ angegeben werden kann; die Konvexität von σ folgt dann aus der Konvexität jedes einzelnen σ_n . Zu den genannten Funktionen gehört unter Annahme der Riemannschen Vermutung die Funktion $\mathcal{E}(0)/\mathcal{E}(it)$. Neulich zeigte der Verf. (dies. Zbl. **11**, 294), daß, unabhängig von der Riemannschen Vermutung, die Funktion $\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}(0)$ das Fourierintegral einer konvexen Verteilungsfunktion ist; in Anschluß hieran werden jetzt einige Betrachtungen über die Riemannsche Vermutung angestellt. Ein weiterer Teil der Arbeit handelt von stabilen, symmetrischen Verteilungsfunktionen. Die Verteilungsfunktion σ heißt stabil, wenn bei beliebigen $a > 0$ und $b > 0$ bei geeignetem $c = c(a, b) > 0$ die Gleichung $\sigma(x/a) * \sigma(x/b) = \sigma(x/c)$ stattfindet. Alle stabilen σ sind von P. Lévy bestimmt worden; spezialisiert man auf

symmetrische σ , so lautet sein Ergebnis: Für jedes $0 < \lambda \leq 2$ wird durch $L(t; \omega_\lambda) = e^{-|t|^\lambda}$ eine stabile, symmetrische Verteilungsfunktion ω_λ definiert; sämtliche stabile, symmetrische Verteilungsfunktionen sind durch $\sigma(x) = \omega_\lambda(x/a)$, $0 < \lambda \leq 2$, $a > 0$, gegeben (von der trivialen Lösung $\sigma(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign } x)$ wird dabei abgesehen). Der Lévy'sche Beweis beruht darauf, daß man von einem beliebigen σ in dem „Attraktionsbereich“ von ω_λ ausgeht; durch wiederholte Faltungen und geeignete Normierungen der Faltungen entsteht dann ω_λ als Grenzfunktion. Der Verf. zeigt jetzt, daß man für das genannte σ in dem Attraktionsbereich von ω_λ eine konvexe Verteilungsfunktion wählen kann, woraus folgt, daß ω_λ ebenfalls konvex ist. Somit ergibt sich, daß jede stabile symmetrische Verteilungsfunktion auch konvex ist, welche Folgerung besonders hervorgehoben wird, weil Gauß die beiden Eigenschaften der Symmetrie und Konvexität nebeneinander als natürliche Bedingungen für die Verteilungsfunktion der Fehler bei zuverlässigen Messungen aufgestellt hat. Der Beweis wird sogleich für den entsprechenden Satz für Verteilungsfunktionen $\varphi = \varphi(E)$ im n -dimensionalen Euklidischen Raum R_n geführt; Symmetrie bedeutet hier Invarianz bei beliebigen Drehungen um $y = 0$, und Konvexität bedeutet, daß $\varphi(E)$, abgesehen von einer eventuellen Unstetigkeit in $y = 0$, das Integral einer bei wachsendem $|y|$ nicht zunehmenden Dichte $\eta(|y|)$ ist; die Definition der Stabilität ist ungeändert. Der Satz lautet dann, daß für jedes $0 < \lambda \leq 2$ durch $A(u; \psi_{n\lambda}) = \int_{R_n} e^{i u y} \psi_{n\lambda}(dR_y) = e^{-|u|^\lambda}$ (wo $u y$ das Skalarprodukt der beiden n -dimensionalen

Vektoren u und y bedeutet) eine stabile, symmetrische und konvexe Verteilungsfunktion $\psi_{n\lambda}$ definiert wird, und daß sämtliche stabile, symmetrische Verteilungsfunktionen durch $\varphi(E) = \psi_{n\lambda}(E/a)$, $0 < \lambda \leq 2$, $a > 0$, gegeben sind (wenn von der durch $\varphi(0) = 1$ definierten, trivialen Lösung abgesehen wird). Während bei Lévy einige Schlüsse nur summarisch angedeutet sind, ist der Beweis hier in allen Einzelheiten durchgeführt. Ferner enthält die Arbeit ein Resultat über den analytischen Charakter der Dichte von $\psi_{n\lambda}$ als Funktion von $|y|$ aufgefaßt. Der Fall $\lambda = 2$ ist der einzige, wo die Streuung endlich und positiv ist. Dagegen beruht es offenbar auf einem Versehen, wenn in der Arbeit angegeben wird, daß jede stabile Verteilungsfunktion von positiver endlicher Streuung notwendig symmetrisch ist. *Jessen* (Kopenhagen).

Corput, J. G. van der: Verteilungsfunktionen. III., IV. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **39**, 10—19 u. 19—26 (1936).

Für I bzw. II siehe dies. Zbl. **12**, 347 bzw. **13**, 57. III bringt Beweise der Sätze 9, 10, 11 aus I. IV bringt Hilfssätze für spätere Zwecke und Verallgemeinerungen von Ergebnissen aus I, u. a. des folgenden Satzes 6: Ist $\psi(x)$ irgendeine stetige monotone Funktion mit $\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \psi(\gamma) = 0$, $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \psi(\gamma) = 1$, so kann man jede in $(-\infty, \infty)$ überall dichte Folge durch Umordnung in eine Folge U mit der Verteilungsfunktion $\psi(\gamma)$ überführen, und zwar so, daß für jedes γ und jedes natürliche x gilt: $|U_\gamma(x) - x\psi(\gamma)| < 2 + 2 \log x$.

($U_\gamma(x)$ ist die Anzahl der ersten x Glieder von U , welche $< \gamma$ sind.) — Interessant an diesem Satz ist, daß es bis jetzt noch nicht bekannt ist, ob eine spezielle Folge U mit zugehöriger Verteilungsfunktion $\psi(\gamma)$ existiert, derart, daß für jedes γ bei hinreichend großem x eine wesentlich schärfere Abschätzung als (1) gilt. *Koksma* (Amsterdam).

Reihen:

Takahashi, Tatsuo: On the termwise differentiated Legendre series. Jap. J. Math. **12**, 71—80 (1935).

L'influence de l'allure de $f(x)$ aux points-frontières $x = \pm 1$ de l'intervalle $(-1, +1)$ sur la convergence et la sommabilité de son développement en série de Legendre à l'intérieur de $(-1, +1)$ est bien connue. Ainsi p.ex. ce développement n'est équi-convergent pour $x = \cos \theta$ et $0 < \theta < \pi$ avec la série de Fourier de $f(\cos \theta) \cdot \sqrt{\sin \theta}$ que si le produit $f(x) \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ est intégrable (L) dans $(-1, +1)$. L'auteur a étudié

influence des points $x = \pm 1$ sur la sommabilité $(C, 1)$ du développement en question dérivé terme à terme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + \frac{1}{2}) \cdot P'_n(x) \int_{-1}^{+1} f(t) \cdot P_n(t) \cdot dt.$$

Il démontre son équisommabilité $(C, 1)$ au point $x = x_0$ avec la série de Fourier de $(\cos \theta) \sqrt{\sin \theta}$ dérivée terme à terme sous la condition d'intégrabilité (L) dans $(-1, +1)$ de $(x - x_0)^{-1} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} [f(x) - f(x_0)]$, où $-1 < x_0 < +1$. Généralisation immédiate qu'il serait intéressant à démontrer: équisommabilité (C, δ) sous la condition d'intégrabilité (L) dans $(-1, +1)$ du produit $(x - x_0)^{-1} \cdot [f(x) - f(x_0)] \cdot (1 - x^2)^{\frac{\delta}{2}-1}$, si $\delta > 1$, le cas $\delta < 1$ exigeant l'étude de l'influence de l'allure de $f(x)$ dans $-1 \leq x \leq +1$.

E. Kogbetliantz (Téhéran).

Gontcharoff, W.: Sur la convergence de la série d'Abel. *Rec. math. Moscou* **42**, 173—483 (1935).

The paper deals with the convergence properties and the analytic nature of the sum-function for Abel series

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n z (z - n\omega)^{n-1}}{n!} \quad (c_n = \text{given constants}),$$

to which we are led, when seeking to determine a function $f(z)$ such that

$$f^{(n)}(n\omega) = c_n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

[We can assume here, without loss of generality, $\omega = 1$.] The author first shows that if the series

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z (z - n)^{n-1} / n! \quad (A^*)$$

converges (converges absolutely) for a certain $z_0 (\neq 0)$, it converges uniformly (converges absolutely) for all finite z . — Next, applying Abel transformation to (A^*) and writing

$$(1 - z/n)^n = e^{n \log(1 - \frac{z}{n})} = e^{r \cdot \frac{n}{r} \cdot \log \sqrt{1 - 2 \frac{r}{n} \cos \theta + \frac{r^2}{n^2}}} \equiv e^{r \varphi(\frac{r}{n})} \quad (z = r e^{i\theta}),$$

we are led to the study of $H \equiv H(\theta) = \max \varphi(t) \quad (t \text{ real}; 0 \leq t < \infty)$,

by means of which it is shown that $F(z)$ — sum of the convergent series (A^*) — is an entire function such that

$$|F(z)| < e^{[H(\theta) + \varepsilon]r} \quad (r = |z| - \text{sufficiently large}; \varepsilon > 0 \text{ arbitrarily small}).$$

Conversely, if $f(z)$ is an entire function such that

$$|f(z)| < e^{r k(\theta)}, \quad 0 \leq k(\theta) < H(\theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi; k(\theta) \text{ continuous}),$$

then $f(z)$ may be developed in Abel series

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(n) \frac{z(z - n)^{n-1}}{n!}. \quad (1)$$

The proof is achieved by expressing the remainder R_n of (1), for $z = x$ real negative, as

$$R_n = (-1)^n \int_{x_0}^0 dx' \int_{x'}^1 dx'' \dots \int_{x^{(n-1)}}^{n-1} f^{(n)}(x^{(n)}) dx^n$$

(cf., i.d., *Ann. École norm.* **1930**, 11) and estimating $f^{(n)}(x)$ by means of Cauchy Theorem. An interesting consequence is the following: the relations $f^{(n)}(n) = 0$ ($n = 0, 1, \dots$) imply $f(z) \equiv 0$, $f(z)$ being of the aforesaid nature. *J. Shohat* (Philadelphia).

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: Notes on the theory of series. XIX: A problem concerning majorants of Fourier series. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **6**, 304—315 (1935).

Let $f(x)$ be integrable and $f(\theta) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_m e^{mi\theta}$. If $|c_m| \leq C_m$ and if $\sum_{-\infty}^{\infty} C_m e^{mi\theta} \sim F(\theta)$ is a Fourier series then $F(x)$ is called a majorant of $f(x)$, and exact majorant if $|c_m| = C_m$.

Let $J_r(f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^r d\theta \right)^{1/r}$. The authors discuss the relationship between $J_r(f)$ and

$J_r(F)$ where F is any majorant of f . While it is easily seen that $J_{2k}(f) \leq J_{2k}(F)$, k positive integer, holds for every majorant, and $J_1(f) = J_1(F)$ for the exact majorant, the inequality $J_q(f) \leq J_q(F)$ is no more true for every majorant if $q > 2$ is unrestricted, as may be shown by simple examples. The main result of the paper is embodied in the following theorem. Let $1 < p \leq 2$, $q > 2$, $1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1$. Then if (*) $J_q(f) \leq A_q J_q(F)$ is true for every f and every majorant of f , (**) $J_p(F) \leq A_p J_p(f)$ will be true for every f and some majorant of f . Some extremal properties of trigonometric polynomials and their majorants are also derived. (XVIII. see this Zbl. 12, 351.)

J. D. Tamarkin (Providence).

Hyslop, J. M.: Some relations between the de la Vallée Poussin and Abel methods of summability. Proc. London Math. Soc., II. s. 40, 449—467 (1935).

Remplaçant dans la définition du procédé (VP) de M. de la Vallée Poussin la variable discontinue $n = E(n)$ par celle continue ω l'auteur introduit un procédé de sommation noté (GVP) et définit ainsi

$$(GVP) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n a_m = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{E(\omega)} \frac{\Gamma^2(\omega+1)}{\Gamma(\omega+m+1)\Gamma(\omega-m+1)} a_m = s$$

(GVP) se réduit à (VP) si ω tend vers $+\infty$ par valeurs entières, donc (GVP) \supset (VP) c'est-à-dire $\sum a_m$ sommable (GVP) l'est aussi (VP). Comparant (GVP) aux procédés (A) d'Abel et (W) de Weierstrass

$$(W) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n a_m = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\alpha n} \quad (\alpha \geq 0)$$

l'auteur démontre que sous la condition $a_m = O(m^\lambda)$, où λ est fixe quelconque, les procédés (GVP), (VP) et (W) sont équivalents. Le procédé (W) est plus puissant

que (VP) car la progression géométrique $\sum_0^\infty r^n e^{in\theta}$ p. ex. sommable (W) pour $r < e^{|\theta|}$

n'est pas sommable (VP) si $r_0(\theta) \leq r < e^{|\theta|}$, où $r = r_0(\theta)$ est l'équation de la boucle extérieure du limaçon de Pascal $|1+z|=2|\sqrt{z}|$. Enfin, si $a_m = O(m^\lambda)$ la sommabilité

de $\sum_0^\infty a_m$ par le procédé (VP) entraîne celle (A) et avec la même somme, si la série $\sum_0^\infty a_n z^n$ possède un cercle de convergence de rayon unité.

E. Kogbetliantz (Téhéran).

Gergen, J. J., and S. B. Littauer: Continuity and summability for double Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 401—435 (1935).

In Part I are established the following theorems on equivalence of Cesàro and Riesz methods of summability for a double series $\sum a_{mn}$: (I) A series is summable (C, α, β) ($\alpha, \beta \geq 0$) to s if it is ultimately bounded (C, α, β) and summable (R, α, β) to s ; it is summable (R, α, β) to s if it is ultimately bounded (R, α, β) and summable (C, α, β) to s . (II) A series is bounded (C, α, β) ($\alpha, \beta \geq 0$) if and only if it is bounded (R, α, β) . (I) is interesting because of its generality and its analogy to results already known on equivalence of Cesàro and Hölder methods for double series (see an abstract by Schoenberg, this Zbl. 8, 464). Both theorems are proved by aid of three lemmas on simple series, somewhat like but more precise than those used by Hobson in his proof of the Riesz theorem on equivalence of the methods for simple series; and by aid of a minor extension of a lemma of Agnew (see this Zbl. 5, 291). Part II

is devoted to the double Fourier series $\sum_{m,n=0}^\infty a_{mn} \cos mu \cos nv$ of a function $f(u, v)$ integrable on the square $(0, 0; \pi, \pi)$, even and of period π in each variable; attention is restricted to the behavior of f and its Fourier series at the origin. Natural definitions

are introduced for fractional integration and continuity in the mean for functions of two variables, and for boundedness (C, a, b) and almost boundedness (C, a, b) of f in a domain. Then by aid of the results of Part I and a sequence of additional lemmas, the authors establish three extensions of the Hardy-Littlewood theorem, as refined by Paley (Proc. Cambridge Philos. Soc. **26**, 180 & 190), Bosanquet (Proc. London Math. Soc. **31**, 147 & 153), and Wiener (Proc. London Math. Soc. **30**, 1—8; Ann. of Math. **33**, 78), on the equivalence of continuity in the mean of a function of one variable and the summability of its Fourier series. Limitations of space prevent our stating the theorems in full here; suffice it to say that the results are of noteworthy generality and include as particular cases some of the theorems on double series obtained earlier by C. N. Moore (Trans. Amer. Math. Soc. **14**, 96), W. H. Young (Proc. London Math. Soc. **11**, 181), and Merriman (Ann. of Math. **28**, 526). *Adams* (Providence).

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

● **Iseli, Fritz:** *Gewöhnliche Differentialgleichungen nebst Anwendungen.* Berlin: Julius Springer 1936. 106 S. u. 57 Abb. RM. 5.40.

Das Buch ist für junge Ingenieure bestimmt, gibt aber auch dem Mathematiker erwünschte Beispiele aus der Praxis für die einfachsten (vor allem linearen) Differentialgleichungen: Arbeit beim Strammten einer Feder, Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit, natürliche Verzinsung, Stab mit Querschnitten gleicher Beanspruchung, Seilreibung, Erwärmung eines Heizkörpers mit konstanter Wärmezuführung, Newtons Abkühlungsgesetz, Bewegung eines Schwungrades, Ein- und Abschalten eines elektrischen Stromkreises; Bewegung des Uhrpendels, Durchbiegung eines Trägers, Seilkurve, Kettenlinie, ballistisches Galvanometer, Ohmsches Gesetz für Wechselstrom. Existenzbeweise fehlen absichtlich, dagegen werden komplexe Zahlen eingeführt und benutzt; auf die Verwendung von Exponentialpapier und ähnliche praktische Dinge wird Wert gelegt. *F. Rehbock* (Bonn).

Iglisch, Rudolf: *Die erste Resonanzkurve beim Duffingschen Schwingungsproblem.* Math. Ann. **112**, 221—246 (1936).

Der Verf. beschäftigt sich mit der Diskussion derjenigen Lösungen $x = x(t)$ der Differentialgleichung $x'' + a^2 \sin x = -bf(t)$, die an beiden Endpunkten, aber nicht im Innern des Intervalls $0 \leq t \leq \pi$ verschwinden. Dabei sind a und b verfügbare Parameter und $f(t)$ ist eine gegebene Funktion, die sich qualitativ wie $f(t) = \sin t$ verhält. *Wintner* (Baltimore).

Yosida, Kôzaku: *On the groups of rationality for linear differential equations.* Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **17**, 498—510 (1935).

The author studies the automorphisms and the dimension properties of some groups connected to the groups of rationality for linear differential equations. *Janczewski* (Leningrad).

Kourensky, M.: *Sur la réduction de l'intégration des systèmes d'équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre de plusieurs fonctions inconnues, à l'intégration de systèmes d'équations linéaires du premier ordre à une seule fonction inconnue.* Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 1083—1094 (1935).

Bemerkungen und Zusätze im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **10**, 298) über Systeme von zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Funktionen von drei Variablen. Verf. betrachtet hier auch den Fall eines Systems mit zwei unbekannten Funktionen von vier Variablen oder drei unbekannten Funktionen von drei Variablen. *G. Cimmino* (Napoli).

Tsoutsis, A.: *Über die vollständigen Integrale einer partiellen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen.* Bull. Soc. Math. Grèce **16**, 188—200 (1935) [Griechisch].

Verf. schreibt in seinem Vorwort: „Ziel des vorliegenden Artikels ist die Untersuchung der vollständigen Integrale einer partiellen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit einer unbekannten Funktion und beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen auf Grund der Theorie der Scharen infinitesimaler Transformationen von Herrn Vessiot.“ *Bessel-Hagen* (Bonn).

Bureau, Florent: Sur les solutions élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles, totalement elliptiques. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 454—456 (1936).

Soit $f(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ une forme algébrique définie, de degré $n \geq p \geq 2$, dont les coefficients sont constants. L'aut. considère l'équation linéaire écrite symboliquement $f(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_p) u = 0$. Il en indique une solution élémentaire (d'autres auteurs disent: fondamentale), qui a deux expressions différentes, suivant que p est pair ou impair. A l'aide d'une formule qui généralise la formule de réciprocité, relative aux équations du second ordre, il annonce qu'il peut généraliser la théorie des potentiels et le problème de Dirichlet. Il annonce en outre que la méthode bien connue de E. E. Levi permet d'étendre les résultats aux équations linéaires elliptiques à coefficients variables. *Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).*

Caccioppoli, R.: Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti, e sui problemi regolari di calcolo delle variazioni. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 305—310 (1935).

Nach S. Bernstein (Math. Ann. 69) kann man die zweiten und höheren Ableitungen der Lösung u einer quasilinearen Differentialgleichung $Ar + 2Bs + Ct = D$ (in zwei unabhängigen Variablen x, y) im abgeschlossenen Gebiete immer dann abschätzen, wenn uns eine Abschätzung für u selbst und deren erste Ableitungen sowie ebensolche Schranken für die Randwerte und deren Ableitungen genügend hoher Ordnung bekannt sind. Ähnliches gilt für die allgemeinere Gleichung $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$. Die wichtige Abschätzung von S. Bernstein, der sie für den analytischen Fall durchgeführt hatte (für den nichtanalytischen Fall nach derselben Methode vgl. Schauder, dies. Zbl. 7, 208—209), beruht auf ziemlich komplizierten Rechnungen. Verf. hat nun in der vorliegenden Note für dieses Ergebnis ein anderes Verfahren skizziert, das viele Rechnungen erspart und eine Erweiterung der Resultate ermöglicht, indem nämlich in jedem inneren Teilgebiete die fraglichen Ableitungen auch dann abschätzbar sind, wenn über die Randwerte nichts bekannt ist. Daraus werden nach dem bekannten Schema Folgerungen für das Dirichletsche Problem gezogen.

Schauder (Lwów).

Caccioppoli, R.: Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti, e sui problemi regolari di calcolo delle variazioni. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 376—379 (1935).

Bekanntlich ist jede zweimal Hölder-stetig differenzierbare Lösung der elliptischen Gleichung $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ mit analytischem F selbst analytisch. Weiter ist jede einmal Hölder-stetig differenzierbare Lösung eines regulären Variationsproblems $\int_G f(x, y, p, q) dx dy$ analytisch, falls f analytisch ist [E. Hopf, Math. Z.

30 (1929)]. Nach Verf. kann man sich hier von der Bedingung der Hölderstetigkeit befreien und in beiden Fällen nur die bloße Stetigkeit der in Betracht kommenden Ableitungen fordern. Zwecks Lösung dieser Probleme betrachtet der Verf. zwei elliptische Differentialgleichungen: a) eine quasilineare $Ar + 2Bs + Ct = D$, wobei A, B, C, D von u unabhängig sind und in allen Variablen mitsamt ihrer ersten Ableitungen beschränkt bleiben (für $p^2 + q^2 \rightarrow \infty$); b) eine allgemeine Differentialgleichung $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$, für welche F beim $|u| + |p| + |q| + |r| + |s| + |t| \rightarrow \infty$ z. B. in $C(r + t)$ übergeht. Nach Verf. soll es genügen, im Falle a) die Randwerte als bloß einmal stetig differenzierbar, im Falle b) als zweimal stetig differenzierbar anzunehmen [im Falle b) soll auch das Gebiet genügend klein sein], um bereits das Dirichletsche Problem lösen zu können mittels einer im Innern zweimal Hölder-stetig differenzierbaren Funktion. Dem Ref. gelang es nicht, die Skizze des Beweises zu überprüfen. Die Abschätzung am Rande nach der Bernsteinschen Methode (auf die sich hier der Verf. beruft) erfordert nämlich immer — wenn sich der Ref. nicht irrt — die Regularität der Randwerte von etwas höherer Ordnung. *Schauder (Lwów).*

Cibrario, Maria: Il problema di Dirichlet in domini infiniti e le equazioni del secondo tipo misto ellittico-parabolico. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 14, 215—247 (1936).

Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden vom Verf. zum großen Teil schon veröffentlicht (dies. Zbl. 12, 299). Hier werden die Beweise ausführlicher auseinandergesetzt und neue Einzelheiten angegeben, besonders in bezug auf die verschiedene Gestalt der Gebiete, für welche die Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise erbracht sind, und die Regularität der Lösungen auf der „uneigentlichen Geraden“. *G. Cimmmino.*

Nicolesco, Miron: Résolution effective directe de quelques problèmes de frontière concernant les fonctions harmoniques et biharmoniques dans le cas des domaines hypersphériques. Bul. fac. ști. Cernăuți 9, 9—15 (1935).

En désignant par ϱ la distance du point variable au centre de l'hypersphère, l'aut. s'appuie sur la remarque, attribuée par lui à Volterra, que si u est harmonique, $\varrho \partial u / \partial \varrho$ l'est aussi. Par ce moyen, il ramène à des problèmes de Dirichlet le problème de trouver une fonction harmonique u telle que $Ku + \partial u / \partial \varrho$ prenne des valeurs données sur la frontière, K étant une constante donnée, et le problème de Mathieu, qui consiste à trouver une fonction biharmonique u , connaissant les valeurs de u et de son laplacien sur la frontière.

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Rosenblatt, Alfred: Sur la fonction ordinaire de Green de l'espace à trois dimensions. Prace mat.-fiz. 44, 153—185 (1936).

Ziel der Arbeit ist die Herleitung der folgenden Abschätzung bezüglich der Greenschen Funktion $G(P, P')$ eines einfach zusammenhängenden räumlichen Gebietes D für die Laplacesche Gleichung: Setzt man $r = \overline{PP'}$; δ, δ' gleich den Abständen der beiden Punkte P, P' vom Rande, so gilt $G(P, P') \leq \frac{K \delta \delta'}{r^3}$, unter K eine vom Gebiet allein abhängende Konstante verstanden. Wesentlich ist bei der Beweisführung die Voraussetzung, daß das Krümmungsmaß in den Punkten der Randfläche absolut genommen beschränkt sei.

G. Cimmmino (Napoli).

Maria, Alfred J.: Concerning the equilibrium point of Green's function for an annulus. Duke math. J. 1, 491—495 (1935).

As well known Green's function for an annulus possesses a single equilibrium point, i.e. a point in which the gradient vanishes. It lies on the same diameter as the pole on the opposite side of the centre. Denoting by R_1 and R_2 the radii of the annulus, $R_1 < R_2$, and by r the distance of the pole from the centre, the distance of the equilibrium point from the centre is a definite function $g(r)$. The present paper is devoted to the study of $g(r)$ using the theory of elliptic functions. The author proves; $g(r)$ is increasing, $\min g(r)$ is $> R_1$, $\max g(r)$ is $< R_2$. Furthermore $g'(r) \rightarrow 0$ if $r \rightarrow R_1$ or $r \rightarrow R_2$.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Dive, Pierre: Sur le potentiel logarithmique d'une couche elliptique. Mathematica, Cluj 11, 1—22 (1935).

Es wird gezeigt, daß die Ungleichung $c \leq 2ab(a+b)^{-1}$ notwendig und hinreichend ist dafür, daß $-ax^2 - by^2 + c$, wobei a und b positiv sind, das logarithmische Innenpotential einer passend zu wählenden homogenen Ellipsenscheibe darstellt (im dreidimensionalen Fall gibt es keine Ungleichung dieser Art; vgl. dies. Zbl. 1, 395 und 4, 166). Es wird sodann der vom Verf. (dies. Zbl. 2, 208 und 4, 166; auch W. Nikliborc, dies. Zbl. 5, 106) für Ellipsoide gegebene Eindeigkeitsatz auf den zweidimensionalen Fall übertragen und damit eine Fragestellung von E. Hölder (dies. Zbl. 5, 106) elementar und allgemein beantwortet. Endlich wird das Potential eines unendlichen homogenen elliptischen Zylinders mit großer Ausführlichkeit diskutiert.

Wintner (Baltimore).

Bakaliajev, A. S.: Le principe de rayonnement généralisé dans un problème stationnaire dans l'espace de théorie de l'élasticité. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 4, 255—258 (1935).

Das „verallgemeinerte Ausstrahlungsprinzip“ (vgl. dies. Zbl. 12, 70—71) ist auch für stationäre, räumliche Probleme der Elastizitätstheorie gültig. Für ein ins Unend-

liche reichendes elastisches Medium hat auch hier das Problem i. a. keine eindeutige Lösung. In der vorliegenden Arbeit wird die hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit angegeben, die physikalisch die Abwesenheit einer aus dem Unendlichen kommenden Strahlung bedeutet. Als Hilfsmittel wird eine geeignet verallgemeinerte Greensche Formel benutzt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Platrier, Charles: Petites déformations et petits mouvements des corps élastiques homogènes. J. École polytechn., II. s. cahier **34**, 15—76 (1935).

The body forces on an element of a homogeneous elastic solid, whose deformations and small motions are supposed to be produced at constant temperature, are not subjected here to the restriction of being reducible to a single force. The surface tractions on the surface of the element are also not subject to this restriction. — The universal equations of motion are then of the types

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} + \varrho(X - i_x) = 0,$$

$$\frac{\partial \theta_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \theta_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{13}}{\partial z} + 2P + \varrho(\Gamma_x - j_x) = 0.$$

Where $(-i \, dm)$ is the resultant and $(-j \, dm)$ the resultant moment with respect to the centre of gravity of the element dm of the forces of inertia of this element. There are now 9 components of stress T_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$) and they are connected with the 9 quantities $(N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, P, Q, R)$ by relations of types

$$N_1 = T_{11}, \quad 2T_1 = T_{23} + T_{32}, \quad 2P = T_{32} - T_{23}$$

the 9 quantities $(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}, \theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33})$ are needed for the specification of the stress-couple. The quantities $(X \cdot Y \cdot Z)$ are the components of the resultant body force per unit mass and $(\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z)$ the components of the resultant body couple per unit mass. — An energy equation is obtained and general equations are found for expressing the components of strain and rotation in terms of the 18 quantities $T_{mn} \cdot \theta_{mn}$. There are in general 135 coefficients in these equations and to these must be added the density of inertia and six coefficients of inertia making 142 coefficients in all. — A study is made of the propagation of plane waves in a homogeneous medium and a generalisation of Fresnel's wave surface is found for the most complex homogeneous medium.

H. Bateman (Pasadena).

Spezielle Funktionen:

Sheffer, I. M.: A differential equation for Appell polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 914—923 (1935).

Given a set of polynomials $\{P_n(x)\}$ (i. e. P_n is of degree exactly n) and an arbitrarily chosen sequence of constants $\{\lambda_n\}$ subjects to the only limitation that $\lambda_n \neq 0$ in n . There always exists a sequence of polynomials

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n l_{ni} x^i \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{of degree } \leq n,$$

such that the differential equation

$$L(y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) y^{(n)}(x) = \lambda y(x) \quad (1)$$

has, for $\lambda = \lambda_n$, the polynomial solution $y = P_n(x)$. Moreover,

$$\lambda_n = l_{00} + n l_{11} + n(n-1) l_{22} + \dots + n! l_{nn}.$$

The present paper deals with differential equations of type (1) satisfied by the special set of Appell polynomials, characterized by

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = P_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$e^{tx} A(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad A(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad (\text{generating function}).$$

The following interesting result is obtained. $\{P_n(x)\}$ is an Appell set if and only if 1. $L[P_n(x)] \equiv (b_0 + x)P'_n(x) + b_1P''_n(x) + b_2P'''_n(x) + \dots = nP_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$), where

$$B(t) \equiv \frac{A'(t)}{A(t)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n,$$

or 2. $nP_n(x) = (b_0 + x)P_{n-1}(x) + b_1P_{n-2}(x) + \dots + b_{n-1}P_0(x)$ ($n = 0, 1, \dots$).

The foregoing is generalized by requiring $\lambda = \lambda_n$ in (1) to be a polynomial in n , and this yields the following important result. An Appell set satisfies a differential equation of type (1) of finite order, if and only if the generating function $A(t)$ is of the form $e^{Q(t)}$, $Q(t)$ — polynomial. Moreover, k — the degree of $Q(t)$ — represents the smallest possible order of the said equation (excepting the trivial case $k = 0$). Illustration: Hermite polynomials.

J. Shohat (Philadelphia).

Kimball, B. F.: A generalization of the Bernoulli polynomial of order one. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 894—900 (1935).

The author defines a generalized Bernoulli polynomial $B_s(x, w)$ of order 1 for $|s| \leq M$ and $x \neq 0$ or a negative real as that (unique) solution of the equation $[f(x+w, s) - f(x, s)]/w = sx^{s-1}$ which for each x considered is analytic in s over the range in question and has the property $f(x, s) \rightarrow 0$ as $\Re(x) \rightarrow +\infty$ for each s with $\Re(s) < 0$. The existence of $B_s(x, w)$ is shown and certain properties exhibited, especially with reference to an associated generalized zeta-function. *C. R. Adams.*

Koshliakov, N. S.: An extension of Bernoulli's polynomials. Rec. math. Moscou **42**, 425—431 u. engl. Zusammenfassung 431—434 (1935) [Russisch].

The paper is devoted to a study of the polynomials $\{\omega_n^{(p)}(x)\}$ generated by

$$\frac{2e^{xz}}{p+z} \frac{e^{z^2} - 1}{e^{z^2} - 1} \equiv e^{xz} [\Phi(z) - 1] \sim \frac{p}{p+1} \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^{(p)}(x)}{n!} z^{n-1} \dots$$

$$\Phi(z) = \frac{p \operatorname{ch} z + z \operatorname{sh} z}{z \operatorname{ch} z + p \operatorname{sh} z} \quad (p > -1). \quad (1)$$

It is shown that $\omega_n^{(p)}(x)$ is a polynomial in x of degree n ($p \neq 0$), $n-1$ ($p = 0$). It represents a generalization of the classical Bernoulli polynomial $B_n(x)$ $\left[\omega_n^{(\infty)}(x) \equiv 2^n B_n\left(\frac{x}{2}\right) \right]$.

— An expansion of $\omega_n^{(p)}(x)$ is given in a generalized Fourier series according to $\{\sin \mu_j x, \cos \mu_j x\}$ ($j = 1, 2, 3, \dots$), μ_j denoting the real roots of the equation

$$\mu \cos \mu + p \sin \mu = 0. \quad (2)$$

The author further shows, as illustration, two applications of the polynomials $\omega_n^{(p)}(x)$. 1. A summation formula is derived for the difference $f(x+h-0) - f(x+0)$, $f(x)$ being defined in $(x, x+h)$ ($h > 0$), with $f'(x)$ bounded and integrable. 2. The temperature distribution is studied in a homogeneous sphere of a given radius R_2 , under certain boundary conditions. Namely: the solution of the equation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left[v|_{r=0} = 0, \frac{\partial v}{\partial r}|_{r=R_2} + \left(H - \frac{1}{R_2} \right) v|_{r=R_2} = 0, H = \text{given const.} \right]$$

is represented in the form

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{\mu_n r}{R_2} \quad (\mu_n = \text{positive roots of (2)}),$$

and we seek to determine the functions $a_n(t)$. *J. Shohat (Philadelphia).*

Babini, José: Verallgemeinerung der Bernoullischen Polynome. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **32**, 491—500 (1935) [Spanisch].

Ist (φ_i) eine Zahlenfolge, dann werden die verallgemeinerten Bernoullischen

Polynome mit der Spanne h durch $\varphi_n(x) = n! \sum_{r=0}^n h^{n-r} \frac{\varphi_r}{r!} \left(\frac{x}{h} \right)$ erklärt. Als erzeugende

Funktion läßt sich $(1 + zh)^{\frac{x}{h}} e^{z\varphi}$ auffassen, worin $e^{z\varphi}$ in bekannter Weise zu entwickeln ist und $\varphi^n = \varphi_n$ ist. Die charakteristische Beziehung $\Delta_h \varphi_n(x) = n \varphi_{n-1}(x)$ ist leicht herzuleiten. Einen interessanten Sonderfall ergibt $h = 0$. Bemerkenswerte neue Polynome findet man durch den Ansatz $\Delta_h \psi_n(x) = \Delta_h \varphi_n(x) = n \psi_{n-1}(x)$. Eine Reihe von Formeln verbinden die Polynome $\psi_n(x)$ und $\varphi_n(x)$. Setzt man im besonderen $\psi_n(x) = n! h^n \left(\frac{x}{h}\right)_n$ und dann $\varphi_n(0) = \bar{\varphi}_n$, so heißen die so definierten Zahlen verall-

gemeinerte Zahlen von Bernoulli und Rey Pastor, mit ihrer Hilfe kann man dann jedes Bernoullische Polynom darstellen. Für die Polynome $\bar{\varphi}_n(x)$ gibt es einen Ergänzungssatz in der Form $\bar{\varphi}(x) = (-1)^n \bar{\varphi}_n[(n-2)h + k - x]$, und von ihnen aus kann man auch zu einer Verallgemeinerung der Formel von Euler-MacLaurin gelangen. Sätze über die Nullstellen lassen sich leicht herleiten. Unter Benützung der zyklischen Funktionen gelangt man von den verallgemeinerten Bernoullischen Polynomen zu verallgemeinerten Eulerschen Polynomen. Franz Knoll (Wien).

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Izumi, Shin-ichi, and Tosio Kitagawa: On some integral equations. Jap. J. Math. 12, 81—94 (1935).

Es werden Ausdrücke für die analytischen Lösungen der Funktionalgleichungen

$$2f(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x+t) f(t) dt, \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b f^{(k)}(x+t) d\varphi_k(t),$$

$\sum_{v=0}^n p_v(x) \int_a^b f^{(v)}(x+t) d\varphi_v(t) = 0$ aufgestellt, teils unter der Nebenbedingung, daß sie $O(e^{A(x)})$ seien, teils ohne Wachstumseinschränkungen. Vielfach berufen sich die Verff. auf eine Arbeit von G. Valiron, Ann. École norm. 46 (1929); aber die Sätze und Zitate sind so unbestimmt gehalten, daß Ref. nicht ihre Richtigkeit nachprüfen konnte.

Bochner (Princeton).

Scorza Dragoni, G.: A proposito di un teorema di Golomb sulle equazioni integrali non lineari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 385—392 (1935).

Ein Satz des Herrn Golomb über die nichtlineare Integralgleichung

$$\varphi(x) + \int_a^b k(x, y) f[y, \varphi(y)] dy = g(x),$$

wobei über die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial u}(y, u)$ nur eine einseitige Beschränktheit von gewisser Art gefordert wird (dies. Zbl. 9, 312—313), wird hier unter derselben Voraussetzung nach einer anderen Methode (Fortsetzungsprinzip) bewiesen. Schauder (Lwów).

Kantorovič, L.: Sur les espaces semiordonnés linéaires et leurs applications à la théorie des opérations linéaires. C. R. Acad. Sci. USSR, N. s. 4, 13—16 (1935).

Eine neue Art von linearen Räumen wird vom Verf. axiomatisch eingeführt. Als Grundrelationen sind dabei nur die algebraischen (Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen) und die Ordnungsrelation $x > y$ gewählt. Topologische Eigenschaften des Raumes lassen sich dann definieren. Ref. gestattet sich, die genaue Angabe der entsprechenden Axiome zu ersparen, da in den weiteren Publikationen des Verf. (im Druck) eine einfachere Axiomatik derselben Räume gegeben wird.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Kantorovič, L.: Sur quelques méthodes générales de prolongement de l'espace de Hilbert. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 4, 123—126 (1935).

Es ist bekanntlich in manchen analytischen und insbesondere physikalischen Fragen nützlich, gewisse „ideale“ Funktionen, wie z. B. die Diracsche δ -Funktion, einzuführen. Verf. gibt eine allgemeine Methode solcher „Fortsetzung“ des Hilbert

schen Raumes. Es sei also H der Hilbertsche Raum und (x, x) die entsprechende quadratische Form. Wir betrachten ein System \mathfrak{B} von positiv definiten quadratischen Formen $B(x, x)$, welches die Grundform (x, x) umfaßt und mit $B_1(x, x)$ und $B_2(x, x)$ immer eine „schwächere“ Form $B(x, x)$ enthält. Bei Verf. sind die Formen $B(x, x)$ nur auf einer dichten Untermenge des Raumes H definiert, das Resultat der Fortsetzung bleibt aber dasselbe, wenn man nur die Formen betrachtet, welche schwächer als (x, x) sind, und solche Formen kann man immer auf den ganzen Raum H erweitern. Der Raum H mit der Form $B(x, x)$ als metrischer Grundform ist im allgemeinen unvollständig, d. h. es gibt im H solche Elementenfolgen $\{x_n\}$, daß $B(x_n - x_m, x_n - x_m)$ mit $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$, gegen Null konvergiert, welche jedoch kein Limeselement im H besitzen. Durch die entsprechende Hinzufügung von neuen Elementen bildet man den Raum H_B , welcher H umfaßt. Ist dabei B_1 schwächer als B_2 , so ist H_{B_1} im H_{B_2} enthalten. Die Summe $\mathfrak{H} = \sum_{B \in \mathfrak{B}} H_B$ bildet die endgültige, durch \mathfrak{B} erzeugte, Fortsetzung des Raumes H .
A. Kolmogoroff (Moskau).

Variationsrechnung:

● **Donder, Th. de: Théorie invariante du calcul des variations. Nouvelle édit. (Inst. belge de recherches radioscient. Vol. 4.)** Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1935. XXI, 230 pag. Frs. 35.—

This new edition follows the same general methods as the earlier edition [this Zbl. 3, 10], with the addition of fresh material. The book contains three parts which deal with (1) variations of an n -fold integral with variable boundary, (2) extremals, (3) applications to mathematical physics. The integral under consideration is generally of the form $I_n = \int_{(n)} \mathfrak{F}(x^i, y^\alpha, y_i^\alpha, y_{ij}^\alpha, \dots) dx^1 \dots dx^n$, where $y^\alpha (\alpha = 1, \dots, m)$ are functions of x^i ($i = 1, \dots, n$) and of a parameter τ , the x^i being themselves functions of τ and of unvaried parameters λ^i ($i = 1, \dots, n$); $y_i^\alpha = \partial y^\alpha / \partial x^i$, $y_{ij}^\alpha = \partial^2 y^\alpha / \partial x^i \partial x^j, \dots$. The parameter τ may also appear explicitly in \mathfrak{F} . A fundamental part is played by the variational derivatives of \mathfrak{F} with respect to $y^\alpha, y_i^\alpha, \dots$,

$$\frac{\delta \mathfrak{F}}{\delta y^\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y^\alpha} - \frac{d}{dx^i} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y_i^\alpha} \right) + \frac{d^2}{dx^i dx^j} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y_{ij}^\alpha} \right) - \dots, \quad (34)$$

$$\frac{\delta \mathfrak{F}}{\delta y_i^\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y_i^\alpha} - \frac{d}{dx^j} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y_{ij}^\alpha} \right) + \frac{d^2}{dx^j dx^k} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y_{ijk}^\alpha} \right) - \dots, \quad (35)$$

and so on, d/dx^i indicating partial differentiation, the quantity on which it operates being considered as a function of x^i, τ . Summation with respect to repeated indices is here understood. The variational derivative of zero index ($D^0 \mathfrak{F}$) and the variational derivative of index i ($D^i \mathfrak{F}$) are defined in such a way that the first variation of the integral may be written in the form

$$\frac{\delta I_n}{\delta \tau} = \int_{(n)} (D^0 \mathfrak{F}) d(x^1 \dots x^n) + \oint_{(n-1)} \sum_i (-1)^i (\mathfrak{F} X^i + D^i \mathfrak{F}) d(x^1 \dots x^{i-1} x^{i+1} \dots x^n), \quad (76)$$

where $X^i = \delta x^i / \delta \tau$. The first part of the book also deals with the first variation of an n -fold integral in an N -space ($n < N$), the second variation of I_n (five different forms being given), and extension to the case where there are several parameters τ_1, τ_2, \dots . — The integral I_n may be written $\int \mathfrak{F}^\times d(\lambda^1 \dots \lambda^n)$, \mathfrak{F}^\times being expressed in terms of x^i, y^α and their partial derivatives with respect to the λ 's. The conditions under which the integral is invariant under transformation of the λ 's (x^i, y^α being invariants of this transformation and \mathfrak{F}^\times retaining the same functional form), are given explicitly (conditions of parametricity). (J. Géhéniau, this Zbl. 11, 59.) — Transformations of the form $x^i = x^i(x_\star^1, \dots, x_\star^n)$, $y^\alpha = y^\alpha(y_\star^1, \dots, y_\star^m, x_\star^1, \dots, x_\star^n)$ are considered, the parameters τ, λ^i being transformed identically. \mathfrak{F} is transformed according to $\mathfrak{F}_\star = \mathfrak{F} \partial(x) / \partial(x_\star)$, in order to leave $\mathfrak{F} d(x^1 \dots x^n)$ invariant. The tensor character of various expressions with respect to this transformation is discussed, including $\mathfrak{F} X^i$, $d(\mathfrak{F} X^i) / dx^i$, $D^i \mathfrak{F}$, $d(D^i \mathfrak{F}) / dx^i$, $D^i \mathfrak{F}$, $\delta \mathfrak{F} / \delta y^\alpha$, and the results related to the classical absolute differential calculus and the more general absolute calculus of Sinigallia. — In the second part, extremals are defined as solutions of the equations $\delta \mathfrak{F} / \delta y^\alpha = 0$; these are the conditions that I_n should have a stationary value under certain boundary conditions (\mathfrak{F} not containing τ explicitly). The author puts

$$p_\alpha^{i_1} = \frac{\delta \mathfrak{F}}{\delta y_{i_1}^\alpha}, \dots, p_\alpha^{i_1 \dots i_c} = \frac{\delta \mathfrak{F}}{\delta y_{i_1 \dots i_c}^\alpha}, \quad (617)$$

where c is the highest order of derivative $y_{i_1 \dots i_c}^\alpha$ occurring in \mathfrak{F} , and defines a Hamiltonian

$$H = -\mathfrak{F} + \sum_{\alpha} \sum_{i_1} \dots \sum_{i_c} [p_{\alpha}^{i_1} y_{i_1}^{\alpha} + \dots + p_{\alpha}^{i_1 \dots i_c} y_{i_1 \dots i_c}^{\alpha}], \quad (620)$$

this being expressed, by virtue of (617), as a function of

$$x^1, \dots, x^n, p_{\alpha}^{i_1}, \dots, p_{\alpha}^{i_1 \dots i_c}, y^{\alpha}, y_{i_1}^{\alpha}, \dots, y_{i_1 \dots i_c}^{\alpha}.$$

He then gives, as generalised canonical equations of the extremals,

$$\begin{aligned} \frac{dy^{\alpha}}{dx^{i_1}} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}^{i_1}}, \dots, \quad \frac{dy_{i_2 \dots i_c}^{\alpha}}{dx^{i_1}} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}^{i_1 \dots i_c}}, \\ \sum_{i_1} \frac{dp_{\alpha}^{i_1}}{dx^{i_1}} &= -\frac{\partial H}{\partial y^{\alpha}}, \dots, \quad \sum_{i_1} \frac{dp_{\alpha}^{i_1 \dots i_c}}{dx^{i_1}} = -\frac{\partial H}{\partial y_{i_2 \dots i_c}^{\alpha}}. \end{aligned} \quad (622)$$

Generalisations of the Hamilton-Jacobi equation, Hilbert's independence theorem and Weierstraß's excess formula are given. — The applications in the third part include the relativistic field equations for gravitation and electromagnetism, the Hamilton-Jacobi equation for a moving charge, gravitational and electromagnetic waves and rays, Schrödinger's wave equation in general relativistic form, generalised Bianchi-Hilbert identities, adjoint polynomials; the variation of the area of a hypersurface is applied to classical capillarity theory. — A list of the author's works is given. *J. L. Synge* (Toronto).

Horák, Z.: Sur le calcul absolu des variations. *Prace mat.-fiz.* **43**, 119—149 (1936).

This paper contains some formal developments of the equations of the extremals of $\int F(a, \dot{x}, t) dt$, where F is a scalar function of the components of a tensor field a , $\dot{x}^{\nu} (= dx^{\nu}/dt)$ and the parameter t . The fact that the partial derivatives of F with respect to the components of a ($\partial F/\partial a$) are themselves components of a tensor is fundamental. An arbitrary connection $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ ($\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} \neq \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$ in general) is introduced, and absolute (D, Δ) and covariant (V_{λ}) derivatives are defined in terms of it in the usual way. The variation of F may then be written

$$\delta F = \Delta F = \frac{\partial F}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\lambda}} \Delta \dot{x}^{\lambda},$$

in which each term is invariant. When the connection is symmetric, the equations of the extremals may be written

$$V_{\lambda} F - \frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\lambda}} = 0, \quad \left(V_{\lambda} F = \frac{\partial F}{\partial a} V_{\lambda} a \right). \quad (24)$$

Even when the connection is not symmetric, the author takes the equations (24) as the absolute equations of the extremals (although in what sense they then represent the extremals is obscure to the reviewer), and shows (at least for an F homogeneous in \dot{x}^{ν}) that they reduce to

$$\frac{\partial F}{\partial x^{\lambda}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\lambda}} + 2I_{\lambda\nu}^{\mu} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} \dot{x}^{\nu} = 0, \quad (28)$$

which differ from the equations of Euler by the presence of the last term. — The author considers a non-holonomic Riemannian space V_n^m . He proves that the derivative of a scalar with respect to a tensor situated in V_n^m is also a tensor in V_n^m , and shows that the extremals in V_n^m , with respect to variations lying in V_n^m , satisfy

$$V_{\lambda}' F - \frac{D'}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\lambda}} = 0, \quad (53)$$

where the accent indicates projection on to V_n^m , the original connection being the Christoffel symbols of V_n . He shows that (53) remain essentially unchanged in form when non-holonomic parameters are used. The case where the varied curve (not the variation) satisfies the non-holonomic conditions is also discussed. Equations of lines of stationary length and equations of motion of conservative systems are developed in his notation.

J. L. Synge (Toronto).

Morse, Marston: Three theorems on the envelope of extremals. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **21**, 619—621 (1935).

In addition to the topological characterization of a conjugate point given by Morse and Littauer (this *Zbl.* **6**, 350) this paper contains (1) a proof of the theorem

that the envelope of the set of extremals $x_i = x_i(s, \alpha)$, $i = 1 \dots m$ for an analytic variations problem in parametric form in m -space, which pass through a fixed point A , is determined by $r(\leq m-1)$ real single-valued continuous functions $s_i = s_i(\alpha)$, "analytic except at most on analytic loci M_p in the space (α) of dimensions $p < m-1$ " (compare also Whitehead, this Zbl. 12, 278), and (2) a statement of sufficient conditions for a proper, strong, relative minimum in terms of known conditions and of a set of points $H(g, e', e'')$, at a distance less than e' from the endpoint B of the extremal g exclusive of B , "and lying on rays issuing from B making angles less than e'' with the ray negatively tangent to g at B ". A proof of this statement is to be published later.

Arnold Dresden (Swarthmore, Pa.).

Birkhoff, G. D., and M. R. Hestenes: Generalized minimax principle in the calculus of variations. Duke math. J. 1, 413—432 (1935).

The authors give a new proof of Morse's relations involving the critical points of a function f and the connectivity numbers of a region in which it is defined. The case of non-degenerate critical points is treated first. Let $F(C_k)$ be the maximum of $f(x)$ on a k -chain C_k . Under proper choice of the class of admissible k -chains C_k , and a suitable definition of equivalence, the number of non-equivalent k -chains which afford a minimum to $F(C_k)$ is equal to the number M_k of critical points of type k , and Morse's relations are derived. Extensions are made to the case of general boundary conditions (see Morse and van Schaack, this Zbl. 10, 28) and the case of degenerate critical points. As the generalized minimax principle, the results are next extended, under certain restrictions, to the case of a function defined over an abstract space. As an application, Morse's results on the fixed end point problem in the calculus of variations are derived. We observe that the concept of the minimum of the maximum of a function on the sets of a class has been used by Lusternik and Schnirelmann to obtain existence relations for critical points (this Zbl. 11, 28). A. B. Brown.

Funktionentheorie:

Wiener, Norbert: Fabry's gap theorem. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A 3, 239—245 (1935).

L'Auteur donne une démonstration du théorème de M. Fabry: si

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots; \quad \frac{1}{\lambda_n} = o(1/n); \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n > c \quad (n = 1, 2, \dots),$$

l'axe de convergence de $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ est une coupure. Cette démonstration ne diffère de celle de M. Pólya [Math. Z. 29, 549 (1929)] que par les détails, qui sont simplifiés.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Ríos, Sixto: Bemerkungen zur Note „Über einen Satz von M. Mandelbrojt“. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 10, 282—283 (1935).

Une remarque répondant à la critique parue dans ce Zbl. 10, 404. Il s'agit aussi d'une généralisation d'un théorème de M. Mandelbrojt, par l'intermédiaire d'un th. de M. Pólya (Göttinger Nachr. 1927, 191). Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Broggi, U.: Sulle costanti di Fourier-Laguerre. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 310—314 (1935).

Continuation of the papers reviewed in the Zbl. 12, 350, 351. Main results: If the point $z = 1$ is interior to the Borel polygon of the series $\sum_0^\infty \beta_n z^n$, then there exists an entire function of exponential type having the β 's as Fourier-Laguerre coefficients. Necessary and sufficient conditions that $z = 1$ is a regular point of the sum of the series, if the radius of convergence equals 1, is that

$$\int_0^\infty e^{-t} L_m(t) \left\{ \sum_0^\infty \beta_n t^n / n! \right\} dt = \alpha_m$$

exists for all m and $\liminf |\alpha_m|^{1/m} > 0$. — The theorem of Picone (this Zbl. 11, 299) quoted by the author is implicitly contained in the results of S. Wigert [Ark. Mat. Astron. Fys. 15, No 25, 7—9, 18—22 (1921)]. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Wolff, Julius: Généralisation d'un théorème de M. Carleman sur les séries de fractions rationnelles. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 551—553 (1936).

C'est une généralisation d'un théorème donné par M. Carleman [C. R. Acad. Sci., Paris 174, 589 (1922)]. — En voici l'énoncé un peu modifié: Soit une série

$\sum_1^{\infty} \frac{A_k}{z - \alpha_k}$ ayant pour somme zéro sur un arc de courbe simple et continue Γ

au voisinage duquel les pôles α_k ne s'accumulent pas trop vite (distance de α_k à $\Gamma > \rho e^{-\alpha_k}$). Si l'on a $|A_k| < e^{-k\Phi(k)}$ [où $\Phi(k)$ croît vers l'infini avec k], on peut affirmer que tous les A_k sont nuls. *E. Blanc* (Paris).

Suryanarayanan, K. S.: Composite meromorphic functions. J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 241—246 (1935).

Soll $f(z) = g(h(z))$ meromorphe Funktion der Ordnung ω sein, so ist entweder h von derselben Ordnung und g rational, oder $h(z)$ ganz und g von der Ordnung Null, oder g von der Ordnung $\leq \omega/n$, wenn h ein Polynom n -ten Grades ist. *Ullrich*.

Friedman, Bernard: Applications of Tauberian theorems to the study of entire functions. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 14, 232—240 (1935).

Using N. Wiener's Tauberian theorems (this Zbl. 4, 59—60) in their original form, and also in the form simplified by Bochner (this Zbl. 6, 199) the author extends various results obtained for entire functions by Paley and Wiener (Amer. Math. Soc. Colloquium 19) and shows that these results hold for meromorphic functions as well. Thus the following theorem is proved. Let $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots$ and let $\sum_n a_n^{-m-1} < \infty$.

Let $n(r)$ be the number of a_n not exceeding r . Let $\lambda > 0$, $0 < \rho < 1$, $|\theta| < \pi$, $\gamma = m + \varphi$. Then, if $g(z)$ denotes the meromorphic function $\sum \left[\frac{1}{a_n + z} - \frac{1}{a_n} - \dots + (-1)^m z^{m-1} a_n^{-m} \right]$ the following statements are equivalent:

$$(I) \ n(x) \sim \lambda x^\gamma \varphi(x). \quad (II) \ g(x) \sim (-1)^m \pi \lambda \gamma \operatorname{cosec} \pi \rho x^{\gamma-1} \varphi(x),$$

$$(III) \ g(x e^{i\theta}) \sim (-1)^m \pi \lambda \gamma \operatorname{cosec} \pi \rho e^{i\theta(\gamma-1)} x^{\gamma-1} \varphi(x).$$

Here $\varphi(x)$ is any positive continuous function satisfying certain conditions concerning its growth, introduced by Bochner. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Rauch, Armand: Extension d'un théorème de M. Valiron sur les directions de Borel. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 280—282 (1936).

Verf. gibt neue Verschärfungen von Valirons Satz über den mittleren Grenzexponenten $\rho(\theta)$ einer ganzen Funktion $f(z)$ zur Richtung θ . Man vergleiche zunächst dies. Zbl. 1, 21, lese aber dort Grenz- statt Konvergenzexponent. Seien dann f, g, h ganze Funktionen: erstens f vom mittleren Grenzexponenten $\rho(\theta) = \lambda$, g von einer Richtungsordnung $< \lambda$. Dann ist der Grenzexponent für die Nullstellenfolge von $f - g$ für „fast alle“ g gleich λ ; oder schärfer zweitens: sind g, h in jener Richtung nicht zu sehr benachbart, so daß

$$\int_1^{\infty} \log \frac{1}{|g(re^{i\theta}) - h(re^{i\theta})|} \frac{dr}{r^{\lambda+1}}$$

noch konvergiert, und ist in der Richtung θ für f wieder $\rho(\theta) = \lambda$ und Divergenzexponent, während g, h von der Konvergenzklasse der Richtungsordnung λ sind, so hat die Nullstellenfolge des Produkts $(f - g)(f - h)$ in dieser Richtung den Divergenzexponenten λ . *Ullrich* (Gießen).

Rauch, Armand: Sur les algébroides entières d'ordre ρ admettant des angles de divergence π/ρ . C. R. Acad. Sci., Paris 202, 818—821 (1936).

Féodoroff, V.: Sur les fonctions monogènes. Rec. math. Moscou **42**, 485—498 u. franz. Zusammenfassung 499—500 (1935) [Russisch].

Let D be an open and connected domain of the complex plane z , $f(z)$ a function which is integrable over D , $I(\zeta, \varrho) = \int_{\omega(\zeta, \varrho)} (t - \zeta) f(t) d\omega$ where $\omega(\zeta, \varrho)$ is the open circle with the center at ζ and radius ϱ . Let z be a given point of D , $\delta > 0$ fixed. Consider all $\omega(\zeta, \varrho) \subset D$ containing z , $\varrho < \delta$. Set $\bar{Q}(z, \delta) = \sup_{\omega} |I(\zeta, \varrho) \varrho^{-4}|$, $\underline{Q}(z, \delta) = \inf_{\omega} |I(z, \varrho) \varrho^{-4}|$, $\bar{Q}(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{Q}(z, \delta)$. The author proves that a necessary and sufficient condition that $f(z)$ be equivalent to a holomorphic function in D is that (*) $\bar{Q}(z) = 0$ in D and sufficient that (*) hold in $D - E$ where E is a denumerable set which may be empty. Let $f(z)$ be continuous in D . Then a sufficient condition that $f(z)$ be holomorphic in D is that $\bar{Q}(z) = 0$ almost everywhere in D , while $L(z) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 < |h| < \varepsilon} |[f(z+h) - f(z)] h^{-1}|$ be finite in $D - E_0$ where E_0 is a set of type of E . This condition is satisfied in particular if almost everywhere in $D - E_0$, $f(z)$ either has a finite asymptotic derivative, or a finite "average derivative" $\tilde{f}'(z)$, defined by $\lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{-3} \int_{\omega(z, \varrho)} |f(t) - f(z) - \tilde{f}'(z)(t - z)| d\omega = 0$. Finally it is shown that a sufficient condition that a (continuous) $f(z)$ be holomorphic in D is given by $\bar{q}(z) = 0$ in D , where $\bar{q}(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{q}(z, \delta)$, $\bar{q}(z, \delta) = \sup_{C_n} \sigma_n^{-1} \left| \int_{C_n} f(t) dt \right|$ where $\{C_n\}$ is a suitably restricted family of contours, σ_n is the area of C_n and sup is taken relative to all C_n containing the given point z as an interior point.

J. D. Tamarkin.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Copeland, Arthur H.: Admissible numbers. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, N. s. 1, Fasc. 2, 52—57 (1936).

Vortrag, berichtend über eine Möglichkeit der Durchführung einer Axiomatik des Kollektivbegriffes im v. Misesschen Sinne; vgl. dies. Zbl. **13**, 123. W. Feller.

Batiéle, E.: Le problème des dés et son application à la théorie des moyennes. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 545—546 (1936).

Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, bei n „Würfeln“ mit je p Seiten mit einem Wurf eine Punktzahl m zu erzielen, kann auf die Errechnung der möglichen Zerlegungen der Zahl m in n ganze, die Zahl p nicht übersteigende Zahlen zurückgeführt werden. Dieses Problem wurde vom Verf. bereits behandelt (vgl. dies. Zbl. **12**, 362). Im Anschluß daran wird nun für den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$, $m/p = \text{konst.}$, nachgewiesen, daß dieser — wie zu erwarten war — zum Studium des Wahrscheinlichkeitsgesetzes für die Summe von n voneinander unabhängigen aleatorischen Größen mit konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte in ihrem Variationsintervall Anlaß gibt. de Finetti.

Smirnof, N.: Sur la distribution de ω^2 (Critérium de M. R. v. Mises). C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 449—452 (1936).

Die Note bringt folgenden wichtigen und interessanten Grenzwertsatz: Es seien $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ die sich bei n gegenseitig unabhängigen Versuchen ergebenden Werte einer dem Verteilungsgesetz $F(x)$ unterliegenden zufälligen Variablen; die „empirische“ Verteilungsfunktion $S_n(x)$ sei durch

$$S_n(x) = \frac{k}{n} \quad (x_k \leq x < x_{k+1}; \quad k = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$S_n(x) = 0 \quad (x < x_1), \quad S_n(x) = 1 \quad (x \geq x_n)$$

definiert; $g(t)$ sei positiv und in $(0,1)$ definiert, und $t(1-t)g(t)$ daselbst stetig differenzierbar; dann konvergiert das Verteilungsgesetz des bekannten v. Misesschen „Kriteriums“

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} g\{F(x)\} \{S_n(x) - F(x)\}^2 dF(x)$$

bei $n \rightarrow \infty$ gegen

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k}} \frac{e^{-\lambda x} d\lambda}{\lambda \sqrt{-D(\lambda)}};$$

hierin ist $D(\lambda)$ die zum Kern

$$K(x, y) = \begin{cases} x(1-y)\sqrt{g(x)g(y)} & (x \leq y), \\ y(1-x)\sqrt{g(x)g(y)} & (x \geq y) \end{cases}$$

gehörende Fredholmsche Determinante, und die λ_k sind die zugehörigen Eigenwerte.

A. Khintchine (Saratow).

Dugué, Daniel: Sur le maximum de précision des lois limites d'estimations. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 452—454 (1936).

Fortsetzung früherer Untersuchungen (dies. Zbl. **13**, 124). Es wird gezeigt, daß die obere Schranke des Präzisionsmaßes, die früher für alle im Limes nach dem Gaußschen Gesetz verteilten „estimates“ aufgestellt war, auch unter allgemeineren Bedingungen gültig bleibt. Analoge Sätze gelten auch im mehrparametrischen Fall.

A. Khintchine (Saratow).

Zoch, Richmond T.: On the postulate of the arithmetic mean. Ann. math. Statist. **6**, 171—182 (1935).

This paper points out that the four axioms set down by Whittaker and Robinson (Calculus of Observations, p. 215—217, London 1929) from which to deduce the postulate of the arithmetic mean are not sufficient. He gives an example and criticises the proof given by Whittaker and Robinson in detail, giving more restrictive, but sufficient assumptions. In the second part of the paper he discusses critically the source papers cited by these authors (loc. cit.) and in addition papers by O. Suto [Tôhoku Math. J. **6**, 79—81 (1914)] and R. Beetle [Math. Ann. **76**, 444—446 (1915)]. It appears that none of the existing attempts to justify the postulate of the arithmetic mean are entirely satisfactory.

C. C. Craig (Ann Arbor, Michigan).

Baker, G. A.: The probability that the mean of a second sample will differ from the mean of a first sample by less than a certain multiple of the standard deviation of the first sample. Ann. math. Statist. **6**, 197—201 (1935).

The author derives the distribution function of the difference of the means of two samples from the same normal population expressed in standard units of the first sample, pointing out that the result gives the probability that the mean of a second sample will differ from the mean of the first by a given multiple of the standard deviation of the first. He also finds the corresponding result when the difference between the means is expressed in units of the standard deviation of the combined samples. The not very surprising result in each case is that a Student's "t" distribution function is the appropriate one; in fact the second quantity considered differs from the quantity ordinarily used in testing the significance of the difference in two means in such a case by a constant factor.

C. C. Craig (Ann Arbor, Michigan).

Neyman, J.: Su un teorema concernente le cosiddette statistiche sufficienti. Giorn. Ist. Ital. Attuari **6**, 320—334 (1935).

The author here solves a problem raised by R. A. Fisher in his fundamental paper, Philos. Trans. Roy. Soc. London A **222**, 323 (1922), using the terms, "statistic", "sufficient valuation" etc. in the sense there introduced. The author first proves: If T is a sufficient valuation of the parameter a , then the probability function $p(x_1, \dots, x_n)$ may be presented in the product form, $p(x_1, \dots, x_n) \equiv p(T) \cdot \Phi(x_1, \dots, x_n)$, where $p(T)$ depends upon a , and $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ is a determinate function of the x 's, not containing a . He then infers: If there exists a sufficient valuation T of the parameter a , the value which is obtained for it by the method of maximum likelihood is a function of T alone, and thus does not depend explicitly upon the x 's. An example has been worked out to illustrate the theory.

Albert A. Bennett (Providence).

Kullback, Solomon: On the Bernoulli distribution. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 857—864 (1935).

Using the fact that the factorial moments of the binomial distribution, of the related Poisson and Lexis type distributions, and of the multinomial distribution have simple expressions, and by using known expressions for X^n in terms of factorials, the author derives formulae for the moments of these distributions. The moments for the Poisson distribution function are obtained by a limiting process from the expressions given for the binomial case. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

Kullback, S.: A note on the distribution of a certain partial belonging coefficient. Metron **12**, Nr 3, 65—70 (1935).

The partial belonging coefficient considered differs essentially from the " t " usually set up to test the significance of the difference of the means of two samples from normal in that the variances appearing in the denominator are calculated about the mean of the population, instead of about the means of the respective samples. Thus the result arrived at here follows readily from any of the well-known methods used in finding the distribution function of this t , even though it may not previously have appeared in print. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

Kullback, Solomon: On samples from a multivariate normal population. Ann. math. Statist. **6**, 202—213 (1935).

The author determines the distribution of an extensive list of functions calculated for samples drawn from a multivariate normal population, basing the method of solution on the theory of characteristic (moment-generating) functions as previously developed by the author (this Zbl. **11**, 32). These functions are related to the mean, the variance, ratio of variances, Student's distribution, correlation ratio, etc., some treated first for a single sample, then later in the case of k independent samples. Previous results by J. Wishart and M. S. Bartlett (this Zbl. **7**, 23), A. E. Ingham (this Zbl. **7**, 7), S. S. Wilks (this Zbl. **6**, 23) and in earlier papers are utilized. *Bennett*.

Sukhatme, P. V.: A contribution to the problem of two samples. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **2**, 584—604 (1935).

The main purpose of this paper is to discuss the derivation and use of tables of 5% and 1% probability levels in connection with a criterion function, L , to test the significance of the difference (1) between variances $u = \frac{n_1 s_1^2}{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}$ and (2) between arithmetic means $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$, where \bar{x}_1 and \bar{x}_2 are the means of two samples, and $n_1 s_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x}_1)^2$; $n_2 s_2^2 = \sum_{i=1}^{n_2} (x_i - \bar{x}_2)^2$. — The function L given by Neyman and E. S. Pearson is

$$L = \left(\frac{s_1}{s_0}\right)^{\frac{2n_1}{N}} \left(\frac{s_2}{s_0}\right)^{\frac{2n_2}{N}} = \frac{N}{(n_1)^{n_1/N} (n_2)^{n_2/N}} \frac{(u)^{n_1/N} (1-u)^{n_2/N}}{\left(1 + \frac{t^2}{N-2}\right)}$$

where $N s_0^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_0)^2$, \bar{x}_0 being the mean of the combined sample of $N = n_1 + n_2$ items. — The sampling distribution of L is obtained. It is found that the distribution involves an elliptic function of the first order when the samples are of equal size. Tables of the 5% and 1% levels of probability are included in the paper. Finally, the question is discussed as to whether the test is suitable for application to non-normally distributed material. It is found that the test may be applied in practice except to extremely non-normal distributions. *H. L. Rietz* (Iowa).

Wilks, S. S.: The likelihood tests of independence in contingency tables. Ann. math. Statist. **6**, 190—196 (1935).

The Neyman-Pearson likelihood criterion λ_g is set down for the hypothesis that a sample of grouped data is taken from a population of specified group frequencies

and it is pointed out that if the observed group frequencies are large, $-2 \log \lambda_s$ is distributed according to the χ^2 distribution function. It is observed that there is no theoretical reason why χ^2 should be preferred as a criterion to $-2 \log \lambda_s$ in this case. The like argument is shown to apply to testing the hypothesis that several samples of grouped data come from a common population, and to the test for independence in contingency tables. Moreover the calculation of the corresponding likelihood criterion requires fewer operations than for χ^2 . Two numerical examples are included.

C. C. Craig (Ann Arbor, Michigan).

Rhodes, E. C.: The precision of index numbers. J. Roy. Statist. Soc., N. s. **99**, 142—146 (1936).

Geometrie.

Mahler, Kurt: Über Polygone mit Um- oder Inkreis. Mathematica, Leiden B **4**, 33—42 (1936).

Aus n Strecken in bestimmter Reihenfolge läßt sich gerade ein konvexes Polygon mit Umkreis konstruieren, wenn jede Strecke kleiner als die Summe der übrigen ist. Ähnliches gilt für Inkreispolygon mit ungerader Eckenanzahl, während die Seiten eines Inkreispolygons mit gerader Eckenanzahl eine lineare Relation erfüllen.

K. Reidemeister (Marburg, Lahn).

Altshiller-Court, Nathan: On desmic tetrahedra. Math. Student **3**, 97—99 (1935).

The twelve vertices of a desmic group of three tetrahedra may always be considered to be the centres of similitude of four spheres, taken in pairs. Applications. [Cf. Math. Student **2**, 107—111 (1934); this Zbl. **10**, 267]. *O. Bottema* (Deventer).

Carruccio, Ettore: Notizie storiche sulla geometria delle api. Period. Mat., IV. s. **16**, 37—54 (1936).

Historisch-kritische Darstellung von einigen älteren Versuchen, die Gestalt der Wabenzellen der Bienen als Lösung eines isoperimetrischen Problems mit gewissen Nebenbedingungen zu gewinnen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Haenzel, G.: Die Geometrie des linearen Strahlenkomplexes gegründet auf seine Polarentheorie. J. reine angew. Math. **174**, 226—236 (1936).

Als notwendiges Gegenstück zu der in einer früheren Arbeit entwickelten „Geometrie der linearen Strahlenkongruenz“ (vgl. dies. Zbl. **11**, 321) legt der Verf. in dieser geometrisch interessanten Abhandlung die „Geometrie des linearen Strahlenkomplexes“ dar, der bekanntlich in der Geometrie des Strahlenraumes eine ähnliche Stellung einnimmt wie die Fläche zweiter Ordnung und Klasse in der Geometrie des Punkt- und Ebenenraumes. — I. Der lineare Komplex bestimmt nämlich im Strahlenraum eine polare Korrelation, so daß zur umfassenden Behandlung seiner Geometrie im I. Abschnitt zunächst seine Polarentheorie und damit die Grundlagen jener Polarität entwickelt werden müssen. Die Darstellung in Plückerschen Koordinaten und die zwischen ihnen bestehende Fundamentalrelation zeigen, daß ein gegebener linearer Komplex $\Gamma \infty^4$ lineare Kongruenzen enthält, die den C_1^1 -Raum von Γ bilden. Ferner sind für $\Gamma \infty^4$ lineare Strahlenkomplexe nullinvariant; sie bilden den Γ_0 -Raum von Γ . Die Elemente beider — zueinander perspektiver — Räume können stets durch eine und dieselbe Gleichung gekennzeichnet werden. Der C_1^1 -Raum enthält je ∞^4 elliptische — und hyperbolische — und ∞^3 parabolische lineare Kongruenzen. — Γ bedingt sowohl in seinem C_1^1 -Raum, als auch in seinem Γ_0 -Raume je eine polare Korrelation. Die Herausarbeitung der interessanten geometrischen Bedeutung der bilinearen Bedingung für zwei Kongruenzen bzw. Komplexe (die beiden Kongruenzen haben eine Regelschar zweiter Ordnung gemein) führt zu einer wichtigen Aussage über die sog. konjugierten Kongruenzen des C_1^1 -Raumes und ihrem dualen Gegenstück im Γ_0 -Raume. Dies wieder ergibt eine wichtige Aussage über das Polarkongruenzbündel und das duale Polarkomplexbündel, deren Gleichungen explizit und sehr einfach hergeleitet

werden. — II. Der zweite Abschnitt behandelt die Noethersche Abbildung der ∞^3 Strahlen des linearen Strahlenkomplexes auf die ∞^3 Punkte eines dreidimensionalen (Tangential-) Raumes mittels stereographischer Projektion, wobei im Bildraume eine reelle Ebene ε und ein in ihr liegender Kegelschnitt k^2 als Fundamentalgebilde ausgezeichnet sind. Auf diese Weise lassen sich die liniengeometrischen Aussagen auf einen Bildraum mit euklidischer oder pseudo-euklidischer Metrik beziehen. Die Abbildung wird in rechtwinkligen Koordinaten angegeben und gezeigt, daß eine gegebene lineare Kongruenz des Komplexes in eine Kugel übergeht, wobei insbesondere die parabolischen Kongruenzen in Nullkugeln abgebildet werden. Dabei wird durch Betrachtung der Orthogonalitätsrelation zweier Kugeln das wichtige Ergebnis erhalten, daß die in I entwickelte Polarentheorie der Theorie der orthogonalen Kugeln gegenübersteht. — Ein Strahlenkomplex n -ten Grades Γ_n trifft Γ in einer Kongruenz C_n^m , die im Bildraum als algebraische Fläche n -ter Ordnung mit k^2 als n -facher Kurve erscheint. Die Noethersche Abbildung wird dann noch im einzelnen diskutiert und von ihr eine Veranschaulichung gegeben. — III. Der dritte Abschnitt stellt die wichtigsten differentialgeometrischen Eigenschaften der im linearen Strahlenkomplex enthaltenen Regelscharen und ihrer erweiterten (Noetherschen) Bilder zusammen, wobei diese Abbildung es ermöglicht, die wichtigsten besonderen Typen von Regelstrahlen (Torsalstrahl, Torsalstrahl höherer Ordnung, zylindrischer —, Scheitel-, Wende- und mehrfacher Regelstrahl) ganz einfach und anschaulich abzuleiten. — IV. Der letzte Abschnitt handelt über die Involutionen im linearen Strahlenkomplex. Die dreifache Möglichkeit involutorischen Gepaartseins der ∞^3 Strahlen führt allerdings nur zu zwei wesentlich verschiedenen Arten von Involutionen. Über das Bedingtsein beider Arten durch Elemente des Komplexes wird je ein wichtiger Satz hergeleitet. Diese Involutionen können auch von der Theorie der involutorischen quadratischen Cremonatransformationen her gewonnen werden, wie dies im einzelnen gezeigt wird. Dies führt dann auf die anallagmatischen (Moutard) oder selbstinversen Flächen, von denen einige Eigenschaften abgeleitet werden.

Steck (München).

Viola, Tullio: Sui sistemi lineari, a tre e a quattro dimensioni, di complessi lineari. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 14, 249—254 (1936).

In Fortsetzung früherer Untersuchungen (vgl. dies. Zbl. 12, 176) behandelt der Verf. unter Verwendung des Mayorschen Abbildungsverfahrens drei- und vierdimensionale Systeme linearer Komplexe. Ein vierdimensionales System kann dargestellt werden durch Abbildung des Komplexes, der mit allen Komplexen des Systems in Involution steht, ein dreidimensionales durch Abbildung des Komplexbüschels, dessen sämtliche Elemente in Involution stehen zu den Komplexen des Systems. Die Darstellung drei- und vierdimensionaler Systeme wird somit zurückgeführt auf die in der erwähnten Abhandlung behandelte Darstellung eines Komplexes bzw. eines Komplexbüschels. Verschiedene Aufgaben vom Typus der folgenden werden behandelt: Gegeben vier Komplexe, die nicht demselben Bündel angehören, das sie enthaltende dreidimensionale System von Komplexen ist darzustellen.

Prager (Istanbul).

Papillon, P.: Sur les volumes tournants. Bull. math. Fac. Sci. et grandes Écoles 2, 38—45 (1935).

On sait que les surfaces sur lesquelles on peut tracer des contours fermés donnant, par rotation autour de divers axes, des volumes tournants V_i tels que $\sum m_i V_i = 0$, ou les m_i désignent des constantes, sont des hélicoïdes. L'auteur étudie de plus près l'ensemble d'axes correspondant.

W. Feller (Stockholm).

Pastori, Maria: Sul problema di Clebsch. II. Applicazione dei tensori vincolati. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 251—255 (1935).

This paper is a continuation of a previous one (see Zbl. Mech. 4, 52). The Beltrami equations are discussed and the special cases arising when the privileged surfaces $x^3 = \text{const}$ are plane or spherical are treated in some detail.

Murnaghan.

Le Roux, Jean: Sur la notion de distance. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 759—761 (1935).

The euclidean distance between two points can be defined analytically by means of the group of motions of the space into itself. If P_1, P_2, P_3 are three points on the curve ("pseudo line") left invariant by an infinitesimal transformation of the six parameter group, and u_{12}, u_{13}, u_{23} are the invariants of the three pairs of points, then $u_{23} = f(u_{12}, u_{13})$ from which the author obtains a relation

$$\theta(u_{12}) \frac{\partial f}{\partial u_{12}} + \theta(u_{13}) \frac{\partial f}{\partial u_{13}} = 0.$$

By letting $dv_{ik} = \frac{du_{ik}}{\theta(u_{ik})}$ the author obtains $v_{23} = v_{13} - v_{12}$; the invariant v_{ik} with $v_{ii} = 0$ serves as a definition of distance. *M. S. Knebelman* (Princeton).

Le Roux, Jean: Sur les distances non-euclidiennes. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 804—806 (1935).

In this note the author applies his analytic definition of distance (cf. the prec. ref.) to non-euclidean geometry. He writes the group in a canonical form and shows that u_{ik} is the cross-ratio of the four points P_i, P_k and the intersections with $x^2 + y^2 + z^2 + t = 0$ ($t = \pm 1$). Then $dv_{ik} = c \frac{du_{ik}}{u_{ik}}$ determines the distance P_i, P_k in agreement with Cayley's definition. *M. S. Knebelman* (Princeton).

Martinelli, Enzo: Sugli insiemi bidimensionali di punti dello spazio fra loro omografici. Boll. Un. Mat. Ital. **15**, 20—24 (1936).

Es sei s ein Stück einer einfachen Jordan-Fläche (mit einer unwesentlichen Einschränkung): eine eindeutige Abbildung zwischen s und einer Menge s' , welche in beiden Richtungen ebene Schnitte in ebensolche überführt, ist projektiv. *Feller*.

Algebraische Geometrie:

Gherardelli, Giuseppe: Sulle superficie rigate di 4° grado. Boll. Un. Mat. Ital. **15**, 17—20 (1936).

Jede Erzeugende g einer Regelfläche 4. Grades R ist mit zwei anderen Erzeugenden g', g'' von R inzident; man erhält so zwischen den Erzeugenden von R eine (2,2)-Korrespondenz. Die Diskussion der verschiedenen möglichen Typen dieser Korrespondenz führt zu einer einfachen elementarsynthetischen Diskussion der 12 wohl-bekannten Arten von Regelflächen 4. Grades. *E. G. Togliatti* (Genova).

Lauremans, L.: Sur une transformation birationnelle involutive de l'espace. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **5**, 18—21 (1936).

Die ∞^3 Flächen 3. Ordnung, die eine Raumkurve 4. Ordnung 2. Art Γ und drei Punkte A_1, A_2, A_3 allgemeiner Lage enthalten, erzeugen im Raume eine Involution von Punktpaaren PP' . Hier wird die Cremonasche Verwandtschaft zwischen P und P' untersucht. Beschreibt P eine Ebene, so ist der Ort von P' eine Fläche F^{12} , für die Γ vierfach und die Punkte A_i fünffach sind. *E. G. Togliatti* (Genova).

Godeaux, Lucien: Sur une variété algébrique à trois dimensions de genre géométrique nul et de bigenre un. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 1015—1021 (1935).

Construction d'une variété à 3 dimensions de genre géométrique $P_g = 0$ et de bigenre $P_2 = 1$: si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sont des formes quadratiques en x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 , l'équation $\varphi_2^2 \varphi_3^2 + \varphi_3^2 \varphi_1^2 + \varphi_1^2 \varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 = 0$ représente dans S_4 une variété V de genres $P_g = 0, P_2 = 1$. Les variétés $\lambda_1 \varphi_2 \varphi_3 + \lambda_2 \varphi_3 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_1 \varphi_2 = 0$ découpent sur V en dehors des surfaces $\varphi_2 = \varphi_3 = 0, \varphi_3 = \varphi_1 = 0, \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ doubles pour V , les surfaces adjointes des sections hyperplanes. Le système des sections hyperplanes est son propre bi-adjoint. *P. Dubreil* (Nancy).

Godeaux, Lucien: Une observation sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **4**, 322—325 (1935).

Exemple d'une variété algébrique à 3 dimensions V dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro, et qui contient des surfaces dépourvues de courbes

canoniques. L'auteur utilise le résultat suivant: si une variété algébrique à 3 dimensions dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro, possède une involution cyclique d'ordre premier p privée de points unis, les surfaces canonique et pluricanoniques de la variété image de cette involution sont aussi d'ordre zéro. Il l'applique au cas particulier de la variété V à 3 dimensions du cinquième ordre de S_4 transformée en elle-même par une homographie cyclique de période 5 ayant 5 points unis n'appartenant pas à V .
P. Dubreil (Nancy).

Hollerott, Temple Rice: Tact-invariants of primals in S_r . J. London Math. Soc. **11**, 22—24 (1936).

Etude de la condition pour que α hypersurfaces de S_r admettent en un point commun un espace tangent commun $S_{r-\alpha+1}$.
P. Dubreil (Nancy).

Differentialgeometrie:

Deaux, R.: Sur les transformées semi-combescuriennes d'une courbe gauche. *Mathesis* **49**, 419—422 (1935).

Bestimmung aller Raumkurven C_1 , die auf eine gegebene, C , punktweise so abgebildet werden können, daß in entsprechenden Punkten die Tangente von C_1 der Binormale von C parallel ist. (Dann gilt von selbst auch das Umgekehrte.) Spezialfälle und verwandte Transformationen.
W. Fenchel (Kopenhagen).

Yannopoulos, Konstantin: Über einige Transformationen im Raume von ν Dimensionen. *Bull. Soc. Math. Grèce* **16**, 147—158 (1935) [Griechisch].

Elementare Einführung in die Lehre von den reellen volumtreuen affinen Transformationen des ν -dimensionalen reellen Koordinatenraums. Anfänge der affinen Differentialgeometrie der Kurven in diesem Raum, insbesondere Darstellung der Kurven durch natürliche Koordinaten.
Bessel-Hagen (Bonn).

Potron: Sur une expression de la courbure tangentielle d'une courbe tracée sur une surface. *Bull. math. Fac. Sci. et grandes Écoles* **2**, 97—101 (1935).

Busemann, Herbert, und Willy Feller: Bemerkungen zur Differentialgeometrie der konvexen Flächen. II. Über die Krümmungsindikatrizten. *Mat. Tidsskr. B* **1935**, 87—115.

An eine frühere Arbeit (vgl. dies. Zbl. **12**, 274) anknüpfend, geben die Verff. eine vollständige Charakterisierung derjenigen Kurven, die als untere und obere Indikatrizten für einen Punkt O einer konvexen Fläche mit Tangentialebene in O auftreten können. Es seien r, φ Polarkoordinaten in der Tangentialebene mit O als Pol. Damit $r = g(\varphi)$ und $r = G(\varphi)$ die untere bzw. obere Indikatrix einer die Ebene in O berührenden konvexen Fläche darstellen, ist, falls $g(\varphi)$ nicht identisch verschwindet, notwendig und hinreichend, daß der Bereich $0 \leq r \leq g(\varphi)$ konvex ist und der Bereich $0 \leq r \leq G(\varphi)$ mit jedem Punkt P auch die konvexe Hülle von P und dem Bereich $0 \leq r \leq g(\varphi)$ enthält. Verschwindet $g(\varphi)$ in einem Intervall, so kann es an zwei Stellen φ_1 und φ_2 unstetig sein. Von den Strecken $0 \leq r \leq \overline{\lim}_{\varphi \rightarrow \varphi_i} g(\varphi)$, $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, 2$, gehört dann je ein Punkt zur unteren Indikatrix, und diese zwei Punkte können in den angegebenen Grenzen willkürlich vorgeschrieben werden. Verschwindet $g(\varphi)$ identisch, besteht also die untere Indikatrix nur aus dem Punkt O , so ist $r = G(\varphi)$ dann und nur dann obere Indikatrix einer Fläche der betrachteten Art, wenn $G(\varphi)$ Limes einer monoton fallenden Folge nach unten halbstetiger Funktionen ist. Daß die genannten Bedingungen hinreichend sind, wird durch explizite Angabe von Beispielen gezeigt. (I. vgl. dies. Zbl. **11**, 417.)
W. Fenchel (Kopenhagen).

Neve, Maurice de: Sur la transformation de Bäcklund des surfaces pseudosphériques. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 376—377 (1936).

Eine für pseudosphärische Rotationsflächen charakteristische Beziehung zwischen der Fläche und gewissen ihrer Bianchi-Transformierten.
W. Feller.

Delens, Paul: Sur certaines déformations des surfaces. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1314—1316 (1935).

The two fundamental forms for a surface may be written in the form $F = 2f du dv$ and $\Phi = l du^2 + 2m du dv + n dv^2$. Euclidean and centro-affine geometry lead to two different sets of integrability conditions and the problem in both cases is to determine isometric surfaces having the same mean and total curvature at corresponding points. By a suitable transformation on l and n the author obtains a Riccati equation subject to one integrability condition so that in general there is no solution. The author obtains some special solutions and gives the forms in terms of the two curvatures.

M. S. Knebelman (Princeton).

Schapiro, H.: Sur la correspondance entre les surfaces et la représentation des systèmes de courbes. Rec. math. Moscou **42**, 593—595 (1935).

Two surfaces S and S^* in an affine euclidean space of three dimensions are related by a one-to-one point correspondence. At the same time a one-to-one correspondence exists between the vectors v of the tangent plane T at P to S and the vectors \hat{v} in the corresponding tangent plane T^* to S^* , and such that collinear vectors v correspond to collinear vectors \hat{v} . This is expressed by saying that \hat{v} is obtained from v by "transplantation". This transplantation is especially investigated for the case where T and T^* are parallel, and v equipollent to \hat{v} : $v = \hat{v}$. Transplantation of conjugated nets and of geodesics is investigated. One of the special results is Voss' theorem, that a conjugated net of geodesics on a surface is represented on the Gaussian sphere by a net of Tschebycheff.

Struik (Cambridge, Mass.).

Pantazi, Al.: Sur certains réseaux de M. Terracini. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 550—551 (1936).

Le réseau de M. Terracini (ce Zbl. **11**, 81) est formé des lignes dont les tangentes A_0A_1, A_0A_2 engendrent deux congruences projectivement applicables l'une sur la polaire-réciproque de l'autre. Tout réseau situé sur une quadrique est un réseau T . Tous les autres réseaux T dépendent en général de 5 fonctions arbitraires d'un argument. Si A_1, A_2 sont les foyers des rayons A_0A_1, A_0A_2 , les asymptotiques de $(A_1), (A_2)$ se correspondent; la congruence (A_1A_2) est conjuguée aux surfaces $(A_1), (A_2)$ ainsi que aux ∞' surfaces Σ qui sont transformées F de M. Eisenhart de $(A_1), (A_2)$ et dont les plans tangents aux points homologues passent par l'axe A_0A_3 du réseau (A_0) . Les réseaux T qui sont R consistent 1° des réseaux de Wilczynski dont les transformés de Laplace $(A_1), (A_2)$ dégénèrent en lignes droites; 2° des réseaux T situés sur les surfaces réglées à directrices rectilignes; 3° de certains réseaux TR dépendants seulement des constantes arbitraires.

S. Finikoff (Moscou).

Tompkins, C. B.: Linear connections of normal space to a variety in euclidean space. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 931—936 (1935).

This paper gives an extension of the Gauss and Codazzi relations to an m -dimensional Riemannian manifold imbedded in an n -dimensional euclidean space. In the normal space at every point an arbitrary set of mutually orthogonal unitary vectors is introduced. From this follows a theorem on the covariant differentiation of complete tensors. The case, in which the Riemann tensor of the normal connection vanishes, is studied in more detail.

Struik (Cambridge).

Eisenhart, Luther Pfahler: Groups of motions and Ricci directions. Ann. of Math., II. s. **36**, 823—832 (1935).

The Riemann space with fundamental tensor g_{ij} is assumed to admit a group of motions into itself. If the roots of $|R_{ij} - \rho g_{ij}| = 0$ are simple, the Ricci principal directions are uniquely determined and the vectors determining the infinitesimal motions are given by $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \xi^k L_{kj}^i = 0$, where L_{kj}^i is an asymmetric connection with respect to which the Ricci directions are parallel. From these equations it is concluded that when a V_n , for which the roots of the characteristic equation are simple,

admits motions the complete group G_r is such that $\|\xi_v^i\|$ is of maximum rank. The converse of this theorem is also true. If the rank of $\|\xi_v^i\|$ is less than r , not all principal directions are uniquely determined. In this case one gets from Killing's equations $\xi_v^k \left(g_{ik} \frac{\partial \varphi_v^i}{\partial x^j} + g_{jk} \frac{\partial \varphi_v^j}{\partial x^i} \right) = 0$ and if the rank of these equations for g_{ij} is $\frac{1}{2}n(n-1)$ it is proved that the space is an Einstein space. — The last section is devoted to the proof of the theorem that if a V_n admits an intransitive group of motions G_r , the space $\bar{g}_{ij} = \sigma_{,ij} - \varphi \sigma_{,i} \sigma_{,j}$ also admits this group, σ and φ being solutions of $\xi_v^i \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = 0$, φ being so chosen that $|\bar{g}_{ij}| \neq 0$. M. S. Knebelman (Princeton).

Duschek, A.: Zur geometrischen Variationsrechnung. III. Mitt. Das Variationsproblem der F_m im Riemannschen R_n und eine Verallgemeinerung des Gauß-Bonnetschen Satzes. Math. Z. 40, 279—291 (1935).

If R_n is an n -dimensional Riemann space and $x_i = x_i(u_\alpha, t)$ $\alpha = 1, \dots, m < n$ is a one parameter family of m -dimensional subspaces F_m with a common boundary R , then along the boundary $\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0$ and the first variation of the m -dimensional volume is given by $\varrho_{(0)}^i = 0$ where $\varrho_{(t)}^i = -\gamma^{\alpha\beta} \frac{D^2 x_i}{D u_\alpha D u_\beta}$. ϱ^i is the Euler vector, which for a surface in 3-space reduces to $-2H\nu_i$, where H is the mean curvature of the surface and ν_i is the unit normal vector. — The expression for $\frac{\partial \varrho_i}{\partial t}$ in the second variation leads to two invariants, H the mean curvature of F_m and C the Casorati curvature. The expression for $\frac{\partial^2 \varrho_i}{\partial t^2}$ depends on these two invariants, the curvature tensor of the space and also on the family of subspaces F_m . — The last section of the paper obtains $\int_R H d\sigma$ in terms of the above invariants for a closed hypersurface $\bar{\Phi}(x_1 \dots x_{m+1}) = 0$ giving a generalisation of the Gauss-Bonnet theorem. (II. see this Zbl. 8, 225.)

M. S. Knebelman (Princeton).

Gugino, E.: Sulla derivata di direzione dei tensori. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 290—295 (1935).

Introduction of the covariant derivative of a tensor with respect to a given direction by considering the difference d_n of the natural values of the tensor at consecutive points and the difference d_p of the tensor and the tensor obtained by pseudo-parallel displacement. Then $d_n - d_p$ represents the covariant differential. | *Struik*.

Gugino, E.: Sul trasporto ciclico di un tensore di ordine qualunque. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 295—299 (1935).

Following Pèrès, Rend. R. Accad. Lincei 28, 1° sem., 425—428 (1919), the pseudo-parallel displacement of a tensor along an infinitesimal circuit in a Riemannian manifold is studied. The resulting introduction of the Riemann-Christoffel tensor is carried out in detail. Struik (Cambridge, Mass.).

Kagan, B.: Der Ausnahmefall in der Theorie der subprojektiven Räume. Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau, Liefg 2/3, 151—170 (1935).

In the author's paper, Abh. Seminar Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau, Lieferung 1 (1933), § 35, p. 94, a special case of subprojective space had not found sufficient discussion. This case is now submitted to an extensive investigation. The result is expressed in the following theorem. If an arbitrary definite quadratic form of $n-2$ coordinates x^1, x^2, \dots, x^{n-2} be selected, and denoted by $\partial_{\varepsilon\eta} x^\varepsilon x^\eta$ and two arbitrary functions λ, μ of the n coordinates $x^1, x^2, x^3, \dots, x^{n-2}, x^{n-1}, x^n$ be given, related by the equation $\frac{1}{2} \partial_{\varepsilon\eta} x^\varepsilon x^\eta + \lambda x^{n-1} + \mu x^n = 0$

(λ, μ may not be homogeneous of degree one), then the first fundamental tensor of the space g_{ij} is given by $\partial^2 g_{ij} = -(\lambda_{ij} x^{n-1} + \mu_{ij} x^n)$,

where ϑ is an arbitrary function in x^{n-1} and x^n , homogeneous and of order one, and λ_{ij}, μ_{ij} represent ordinary derivatives with respect to the $x^i, i = 1, 2, \dots, n$. *Struik*.

Wegener, J. M.: Untersuchungen der zwei- und dreidimensionalen Finslerschen Räume mit der Grundform $L = \sqrt[3]{a_{ikl}x^i x^k x^l}$. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38, 949—955 (1935).

These special Finsler spaces are characterised by the vanishing of some of the corresponding algebraic invariants of the binary and ternary forms. *Knebelman*.

Rachevsky, P. K.: Dualité métrique dans la géométrie à deux dimensions de Finsler, en particulier, sur une surface arbitraire. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 147—150 (1935).

The author shows how a two dimensional Finsler metric can be obtained by a contact transformation from a metric involving the linear element. By using two such metrics one can define curvature etc. and one defines conjugate metrics by means of lines of zero length. It is shown how to obtain conjugate metrics for a Gaussian surface. — The main idea of the note is to show the duality between distances and angles.

M. S. Knebelman (Princeton).

Schouten, J. A., und D. van Dantzig: Was ist Geometrie? Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau, Liefg. 2/3, 15—48 (1935).

Veblen and Whitehead have made the remark (Foundation of differential geometry, see this Zbl. 5, 218) that a branch of mathematics is called a geometry because the name seems good, on emotional and traditional grounds, to a sufficient number of competent people. The present paper attempts to elucidate the meaning which the "competent people", in the beginning of 1934, attached to the word "geometry". They compare the definition of F. Klein in his Erlangen Program of 1872 with that by Schouten, Rend. di Palermo 50, 142—169 (1926). This definition emphasizes the notion of displacement (Übertragung). Since 1926 however it has been shown that many geometries exist in which displacements do not even exist. Not the notion of displacement, but that of covariant derivative is the characteristic element of these geometries. It became clear in the same period that affinors (tensors) and scalars were no longer the sole object of geometry, but the more general constructions known as geometrical objects. The authors of this paper now formulate the problem of geometry as follows (after van Dantzig): "Be given a finite or infinite system of groups of transformations together with certain geometrical objects defined with respect to these groups. Develop the theory of comitants." (A comitant is a geometrical object depending on given geometrical objects, as Γ_{ij}^h and the curvature quantity R_{kji}^h on the parameters of a given affine displacement). — The authors then return to geometries based on a displacement principle, and show how several geometries can be based on this principle by the introduction of superfluous coordinates. In the last part of the paper the bridge to the (always remaining) intuitive side of geometry is reconstructed by showing how a geometrical object can be "drawn". The result is stated in several ways, and may be summarized by saying that geometrical entities and geometrical objects are the same, considered from different points of view.

Struik (Cambridge, Mass.).

Mechanik.

Grüss, G.: Die Funktionalgleichung der Seilkurve. Z. angew. Math. Mech. 16, 56 (1936).

In der Ebene sei eine stetige Verteilung von gleichgerichteten Kräften parallel zur y -Achse mit der Kraftdichte $\mu(x) \geq 0$ gegeben. Eine zu dieser Verteilung gehörige Seilkurve $y = f(x)$ pflegt man als Grenzkurve von Seilpolygonen für geeignete Systeme endlich vieler Kräfte einzuführen, wobei jedoch der Grenzübergang im allgemeinen nicht streng durchgeführt wird. Der Verf. empfiehlt daher das folgende einwandfreie Verfahren: Man sucht direkt eine Kurve $y = f(x)$ mit der Eigenschaft,

daß sich die Tangenten in je zwei Kurvenpunkten auf der Resultierenden der zwischen diesen Punkten wirkenden Kräfte schneiden. Aus der Funktionalgleichung für f , die diese Eigenschaft zum Ausdruck bringt, erhält man durch Differentiation und einfache Rechnung $f''(x) = c\mu(x)$, c konstant. Daraus folgert man, daß es eine und (bei geeigneten Anfangsbedingungen) nur eine Kurve der gewünschten Art gibt, und von dieser läßt sich nachträglich leicht einsehen, daß sie durch Seilpolygone approximiert werden kann.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Wolkowitsch, David: Sur le problème théorique de l'équilibrage des pièces tournantes. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1010—1012 (1935).

This paper treats the following problem: a given rigid body can rotate around a fixed axis; how should a second rigid body be placed so that this axis may be a principal axis of inertia of the rigid body formed by the two rigid bodies taken together? A simple geometrical answer is given by the use of Culmann's ellipsoid of inertia.

Murnaghan (Baltimore).

Buchanan, H. E., and W. L. Duren jr.: On the characteristic exponents in certain types of problems of mechanics. Duke math. J. **1**, 436—441 (1935).

Die Verff. ziehen recht geläufige Schlüsse aus den Jacobischen Gleichungen.

Wintner (Baltimore).

Mendes, M.: Sur le mouvement de n points de masses variables s'attirant en raison inverse de la $p^{\text{ième}}$ puissance de la distance. Bull. Astron., II. s. **9**, 169—176 (1934).

Die Arbeit enthält verschiedene formale Bemerkungen über das Problem der n Körper bei verallgemeinertem Anziehungsgesetz und im Falle variabler Massen. Vor allem wird die in Jacobis vierter Vorlesung über Dynamik gegebene Virialbeziehung auf diesen Fall übertragen.

Wintner (Baltimore).

Dungen, F.-H. van den: Sur les propriétés des oscillations propres. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 625—627 (1936).

Kryloff, Nicolas, et Nicolas Bogoliouboff: Les mesures invariantes et la transitivité. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1454—1456 (1935).

Ω sei ein kompakter metrischer Raum, $T_t(P)$, $T_s T_t = T_{s+t}$, eine stationäre Strömung in Ω . $P_t = T_t(P)$ sei in t , P stetig. Die vorliegende wertvolle Note skizziert eine Lösung des folgenden Problems: Gibt es endliche, gegenüber der Strömung invariante Volummaße in Ω , und wie klassifiziert man sie? Die Verff. nennen $m(A)$ ein normalisiertes Maß in Ω , wenn $m(A)$ eine auf den Borelschen Mengen von Ω definierte nichtnegative und absolut additive Mengenfunktion mit den Eigenschaften $\lim m(O) = m(A)$ für alle offenen Mengen $O \supset A$, und $m(\Omega) = 1$ darstellt. Die Verff. konnten schon früher (dies. Zbl. **12**, 346) beweisen, daß der Raum dieser normalisierten Maße in gewissem Sinne kompakt ist. Auf Grund dieser einfachen und wichtigen Bemerkung kann man aus einem beliebigen normalisierten Maße $m(A)$ durch Grenzübergang in

$$m_\tau^n(A) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau m(T_{-t}A) dt$$

invariante normalisierte Maße erhalten. Natürlich sind hier Extremfälle mit einbegriffen, z. B. die Strömung auf der Kugel vom Nordpol N weg gegen den Südpol S hin. Man erhält dann alle invarianten Maße mit Hilfe einer willkürlichen Zahl ϑ , $0 \leq \vartheta \leq 1$,

$$m(A) = \begin{cases} \vartheta, & N \text{ in } A, S \text{ nicht in } A, \\ 1 - \vartheta, & S \text{ in } A, N \text{ nicht in } A, \\ 0, & S, N \text{ beide nicht in } A. \end{cases}$$

Allgemein wird der Satz ausgesprochen, daß stets eine Menge \mathfrak{K} von Bahnkurven (Birkhoffs Zentralbewegungen) existiert, gegen welche alle Bahnen statistisch streben. Für jedes invariante normalisierte m gilt

$$m(\mathfrak{K}) = 1, \quad m(\Omega - \mathfrak{K}) = 0.$$

\mathfrak{R} kann als Summe \sum von „transitiven“ Mengen \mathfrak{C} von Bewegungen dargestellt werden. Innerhalb eines solchen \mathfrak{C} reduzieren sich alle invarianten m im wesentlichen auf ein einziges $m = m_{\mathfrak{C}}$. Im Sinne dieses Maßes ist die Strömung metrisch transitiv auf \mathfrak{C} . Jede normalisierte Linearkombination der $m_{\mathfrak{C}}$ für die verschiedenen \mathfrak{C} und jedes Grenzmaß solcher Maße ist ein normalisiertes invariantes m . In dieser Weise kann auch jedes derartige m erhalten werden. Bei beliebiger in Ω stetiger Funktion $f(P)$ existiert in jedem Punkte P von \mathfrak{R} das Mittel

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(T_t P) dt$$

Ist $P \in \mathfrak{C}$, so läßt sich dieses durch das $m_{\mathfrak{C}}$ -Raummittel ausdrücken (in \mathfrak{C}). ¹⁴ *E. Hopf*.

Kryloff, Nicolas, et Nicolas Bogoliouboff: Les mouvements stationnaires généraux dans les systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 200—201 (1936).

Die Note enthält gegenüber der vorangehenden der Verff. [C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1454 (1935); vgl. vorsteh. Ref.] nichts wesentlich Neues. Die Hauptresultate werden mechanisch veranschaulicht, und es wird auf die Möglichkeit der Spektralverlegung der individuellen Zentralbewegungen hingewiesen. *E. Hopf* (Watertown).

Lichtenstein †, Leon: Zur mathematischen Theorie der Gestalt des Weltmeeres. Prace mat.-fiz. **43**, 1—11 (1936).

Die von Lichtenstein entwickelte allgemeine Theorie der Gleichgewichtsfiguren ergab u. a. den mathematischen Existenzbeweis für Ozeane, das sind von einem gleichmäßig rotierenden starren Körper in seinen „Einbuchtungen“ getragene gravitierende Flüssigkeitsmassen im relativen Gleichgewicht; vgl. insb. S. 83—89 seines in dies. Zbl. **7**, 181—182 besprochenen Buchs. In der vorliegenden von K. Maruhn herausgegebenen posthumen Arbeit wird, ausgehend von einer als gegeben betrachteten Gleichgewichtskonfiguration der erwähnten Art, eine Theorie der benachbarten Gleichgewichtsfiguren entwickelt. Das Problem hängt von einer Liapunoff-Lichtensteinschen nichtlinearen Integrodifferentialgleichung ab (vgl. das zitierte Referat) und kann auf Grund der allgemeinen Methoden von Lichtenstein behandelt werden. *Wintner*.

Niklibore, W.: Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten. III. Studia Math. **5**, 111—126 (1935).

Der numerische Koeffizient in der von Lichtenstein vermuteten, von Mazurkiewicz sichergestellten, von E. Hölder verbesserten absoluten Abschätzung der Abplattung wird mittels einer vom Verf. (dies. Zbl. **2**, 207—208; daselbst auch Literatur) in einem Spezialfall entwickelten Methode nunmehr ohne einschränkende Annahmen auf $\sqrt{20}$ herabgedrückt. (II. vgl. dies. Zbl. **7**, 181.) *Wintner* (Baltimore).

● **Jardetzky, W.: Recherches mathématiques sur l'évolution de la terre.** (Édit. spéc. de l'acad. roy. Serbe. Tome 107. Sect. des sci. math. et natur. Tome 29.) Belgrade: Édit. de la fond. de Darinka et Michel A. Petrović 1935. VI, 203 pag. Din. 100.—

The fundamental idea is that of a fluid in "zonal rotation", i. e. the particles of the fluid move in circles about a common axis and the angular velocity of each particle depends only upon its distance from the axis. — With the exception of an introductory chapter concerning the analysis of figures of rotating fluids, the work is divided into three chapters treating respectively three different periods of the earth's history. — The first chapter deals with the figures of a perfect fluid in steady zonal rotation. Using methods due to Liapounoff for the development of the potential of a body differing little from an ellipsoid, the author obtains figures analogous to the well known ellipsoids of Maclaurin. The small vibrations of such a figure are also considered. — The second chapter deals with a fluid in zonal rotation modified by the presence of one or more bodies floating on the surface. Another fundamental modification is the assumption of viscosity, since it is now freely admitted that a zonal motion under such conditions can not be permanent. A thin body floating on such a fluid is subjected to stresses which eventually may cause ruptures along certain lines, which are assumed to be normal at every point to the direction of the tension. The idea of zonal rotation thus affords a partial explanation of Wegener's more empirical theory of continental formation and drift. —

The last chapter is concerned chiefly with the case of a solid shell filled with a fluid in zonal rotation. Here too viscosity plays an important role. A generalization of a theorem of Joukowski on the limit state of such a dissipative system is obtained. The effect of zonal rotation on the migration of the poles is also discussed in considerable detail. *D. C. Lewis.*

Quantentheorie.

Géhéniau, J.: Correspondance entre les champs gravifiques et les champs de la mécanique ondulatoire. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21, 1071—1078 (1935).

Untersuchungen über die allgemein-relativistisch invariante Formulierung der Schrödingerschen Wellengleichung usw., im Zusammenhang mit den Untersuchungen von de Donder. *P. Jordan* (Rostock).

Géhéniau, Jules: Sur la masse propre du photon et le tenseur électromagnétique. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 559—560 (1936).

Die von de Broglie vertretene Idee, daß das Lichtquant eine zwar kleine, aber doch von Null verschiedene Ruhmasse habe, würde verlangen, daß die Spur des elektromagnetischen Energietensors ungleich Null wäre. Der Verf. bemerkt: 1. Eine solche von Null verschiedene Spur tritt tatsächlich auf bei dem Maxwell-de Donderschen asymmetrischen Energietensor, der sich in einem polarisierbaren Medium ergibt. 2. Eine von Null verschiedene Spur findet sich auch in der Bornschen Elektrodynamik; aber gerade für ebene Wellen ergibt sich auch aus der Bornschen Theorie eine verschwindende Spur. *P. Jordan* (Rostock).

Heisenberg, W., und H. Euler: Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons. Z. Physik 98, 714—732 (1936).

Im Zusammenhang mit der Möglichkeit von Prozessen der Erzeugung und Vernichtung von Elektronenpaaren ergibt die „Löchertheorie“ Korrekturen für die Maxwellschen Vakuum-Feldgleichungen. Diese werden berechnet für den speziellen Fall, daß das Feld sich auf Strecken von der Größenordnung der Comptonwellenlänge nur wenig ändert; in diesem Falle kann man nämlich die eintretenden Abänderungen ausdrücken durch ein Zusatzglied in der Lagrangefunktion des Vakuumfeldes, welches nur von den Feldstärken und nicht von deren Ableitungen abhängt. Dieses Zusatzglied bedeutet das Auftreten von Prozessen der „Streuung von Licht an Licht“. Das Ergebnis lautet:

$$L = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) + \frac{2\pi e^2}{\hbar c} \int_0^\infty e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta^3} G(\eta);$$

$$G(\eta) = \eta^2 (\mathfrak{E} \mathfrak{B}) \cdot \operatorname{ctg} \omega + \frac{\eta^2}{3} (\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}^2) + |\mathfrak{E}_k|^2;$$

ω ist definiert als Phase der komplexen Zahl

$$\cos \left(\frac{\eta}{|\mathfrak{E}_k|} \sqrt{(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) + 2i(\mathfrak{E} \mathfrak{B})} \right).$$

Hierin bedeuten $\mathfrak{E}, \mathfrak{B}$ die auf eine Probeladung wirkende Kraft; und es ist

$$|\mathfrak{E}_k| = \frac{2\pi m^2 c^3}{eh} \approx \frac{1}{137} \cdot \frac{e}{(e^2/mc^2)^2} = \text{„kritische Feldstärke“}.$$

Mit e, m sind Ladung und Ruhmasse des Elektrons bezeichnet. Für kleine $\mathfrak{E}/|\mathfrak{E}_k|$, $\mathfrak{B}/|\mathfrak{E}_k|$ kommen die schon von Euler und Kokkel berechneten Abweichungen von den linearen Maxwellschen Gleichungen heraus. — Vergleich mit der Bornschen nichtlinearen Elektrodynamik wird durchgeführt. *P. Jordan* (Rostock).

Thomson, J. J.: The nature of light. Nature 137, 232—233 (1936).

Es werden Lösungen der Maxwellschen Gleichungen diskutiert, die geeignet sein würden, das Lichtquant darzustellen. *Casimir* (Leiden).

Wataghin, G.: Sur l'interaction entre protons et neutrons. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 833—835 (1936).

Massey, H. S. W., and E. H. S. Burhop: The relativistic theory of the Auger effect. *Proc. Roy. Soc. London A* **153**, 661—682 (1936).

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Augereffektes wird im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **10**, 429) durchgeführt unter Verwendung relativistischer Wellenfunktionen und unter Berücksichtigung der Retardierung der Wechselwirkungskräfte. Für Gold unterscheiden die Ergebnisse sich wesentlich von denjenigen der nichtrelativistischen Rechnung. Ein Rechenfehler in der früheren Arbeit wird verbessert; für leichte Kerne besteht jetzt eine sehr befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Die experimentellen Daten reichen aber nicht aus, um für schwere Kerne die Ergebnisse der relativistischen Rechnung zu prüfen.

Casimir (Leiden).

Basu, K.: On a new method of calculation of Stark effect of all orders applicable to the Balmer lines of hydrogen. *Bull. Calcutta Math. Soc.* **26**, 79—138 (1935).

Der Verf. berechnet den Starkeffekt verschiedener Ordnungen für Wasserstoff durch eine modifizierte Perturbationsmethode. Er führt die Rechnungen bis zur vierten Näherung. In einem Feld von 10^6 V pro Zentimeter ist die Störung vierter Ordnung für viele H_β - oder H_γ -Linien größer als die Störung dritter Ordnung, woraus der Verf. auf das Aufhören der Konvergenz der Entwicklung nach Potenzen der Feldstärke schließt.

Waller (Upsala).

Margenau, Henry, and William W. Watson: Pressure effects on spectral lines. *Rev. Modern Physics* **8**, 22—53 (1936).

Ein zusammenfassender Bericht über die Theorien der Verbreiterung und der Verschiebung von Spektrallinien in Gasen unter spezieller Berücksichtigung der Effekte bei hohen Fremdgasdrucken.

Weisskopf (Zürich).

Fisk, J. B.: Theory of the scattering of slow electrons by diatomic molecules. *Physic. Rev.*, II. s. **49**, 167—173 (1936).

Es wird die elastische Streuung langsamer Elektronen durch ein zweiatomiges Molekül berechnet unter Zugrundelegung eines Potentialverlaufs, der sich in elliptischen Koordinaten durch einen einfachen dreiparametrischen Ausdruck darstellen läßt. Für N_2 , O_2 , H_2 ergibt sich eine befriedigende Übereinstimmung mit dem Experiment.

Casimir (Leiden).

Kossel, W.: Zur Systematik der Röntgenreflexe eines Raumgitters. *Ann. Physik*, V. F. **25**, 512—526 (1936).

Im Anschluß an drei früher erschienene Arbeiten [*Z. Physik* **94**, 139 (1935); *Ann. Physik* [5] **23**, 677 (1935); *Göttinger Nachr.* **1**, 229 (1935)] wird eine Konstruktion und Darstellung der gesamten in einem gegebenen Kristallgitter für eine gegebene Röntgenwellenlänge λ möglichen Reflexe entwickelt. — Um zu einer gegebenen Einfallrichtung \mathfrak{R}_0 die möglichen Reflexionsrichtungen \mathfrak{R}_1 an einer Netzebene N eines kubischen Kristalls zu erhalten, konstruiert man um den Schnittpunkt von \mathfrak{R}_0 und N eine Hilfskugel vom Radius $R = 2a/\lambda$ (a = Kantenlänge des Elementarwürfels) und eine Hilfsebene H im Abstand $p = \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$ (h, k, l = Indizes von N) parallel zu N und erhält in den Verbindungsgeraden des Kugelzentrums mit dem Schnittpunkt von Kugel und Hilfsebene die möglichen Reflexionsrichtungen gemäß der Bragg'schen Gleichung: $\sin \vartheta = p/R = \lambda \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}/2a$. Gegenüber der Ewaldschen Methode hat diese Konstruktion den Vorteil, daß für alle Einfallrichtungen nur eine Kugelkonstruktion nötig ist, um alle möglichen Reflexionsrichtungen zu erhalten. — Zur Veranschaulichung können auf der Hilfskugel die Richtungen aufgezeichnet werden, die zu einer Reflexion führen und aus ihr hervorgehen. Speziell wird das System der Reflexe am kubisch-flächenzentrierten Gitter bei fallender Wellenlänge diskutiert.

W. Nowacki (Zürich).

Wasastjerna, Jarl A.: The forces acting between atoms and ions and the elastic properties of crystals. *Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math.* **8**, Nr 20, 1—24 (1936).

Muto, Toshinosuke: On the quantum theory of the phosphorescence of crystal-phosphor. Sci. Pap. Inst. Physic. Chem. Res. 28, 171—206 (1935).

Ein Kristallphosphor wird mit Hilfe der Theorie der Halbleiter behandelt. Es wird angenommen, daß die Fremdatome im Phosphor in genügend kleiner Konzentration vorhanden sind, so daß ihre Energieniveaus diskret sind. Daneben existieren die kontinuierlichen Energiebänder der Grundsubstanz. Die Anregung des Phosphors besteht im Übergang eines Elektrons vom kontinuierlichen Energieband in einen diskreten angeregten Zustand des Fremdatoms. Der umgekehrte Übergang gibt das Phosphoreszenzlicht. Er erfordert lange Zeit, weil er nur gleichzeitig mit einer Änderung der Abstände der Atome in der Umgebung des Fremdatoms möglich ist. Aus der Theorie folgt, daß die Lichtintensität eine Summe eines rasch und eines langsam abklingenden Terms ist. Die Abklingung des Phosphoreszenzlichts erfolgt um so rascher, je höher die Temperatur, weil die Temperaturbewegung der Atome die notwendige Umordnung erleichtert. Beide Resultate sind in qualitativer Übereinstimmung mit den Experimenten von Lenard.

Bethe (Ithaka).

London, H.: Phase-equilibrium of supraconductors in a magnetic field. Proc. Roy. Soc. London A 152, 650—663 (1935).

Aus den Londonschen Gleichungen für den Supraleiter wird eine Bedingung für den Übergang vom supraleitenden zum nichtsupraleitenden Zustand abgeleitet. Der Übergang erfolgt, wenn die Stromdichte in der Oberfläche der supraleitenden Phase einen kritischen Wert J_T überschreitet. Für Supraleiter großer Dimensionen ist dies identisch mit der Bedingung, daß das Magnetfeld nicht größer sein soll als ein kritischer Wert H_T . Für kleine Dimensionen ergeben sich Abweichungen von letzterer Bedingung. Es wird gezeigt, daß eine „Oberflächenspannung“ in der supraleitenden Phase existieren muß, welche die freie Energie eines supraleitenden Gebietes kleiner Dimension erhöht. Eine solche Oberflächenspannung würde die Hystereseerscheinungen bei der Bildung und dem Verschwinden supraleitender Gebiete im Magnetfeld erklären.

Bethe (Ithaka).

Møller, C.: On the radiative collision between fast charged particles. Proc. Roy. Soc. London A 152, 481—496 (1935).

Die Ausstrahlung beim Zusammenstoß zweier schneller Teilchen wird korrespondenzmäßig behandelt. Die Quantenelektrodynamik in der Fassung von Heisenberg und Pauli und von Dirac gibt dasselbe Resultat. Von dem Grenzfall, daß eines der Teilchen sehr schwer ist, geht das Resultat in die Formel von Bethe und Heitler über; für die Ausstrahlung beim Zusammenstoß zweier Elektronen ergibt sich natürlich eine andere Formel.

Bethe (Ithaka).

Richtmyer, Robert D.: The probability of KL ionization and X-ray satellites. Physic. Rev., II. s. 49, 1—8 (1936).

Der Verf. gibt mit Anwendung der Bornschen Näherung eine Berechnung des Wirkungsquerschnittes für doppelte Ionisation eines Atoms durch Elektronenstoß. Die Berechnungen für $1s\ 2s$ und $1s\ 2p$ Ionisation werden verwendet zur Berechnung der Intensität von Röntgensatellitlinien nach der Theorie des Einelektronensprunges. Das Ergebnis für Kationen zeigt Übereinstimmung mit den experimentellen Intensitäten. Entsprechendes gilt von der Intensitätsveränderung mit der Atomnummer. Waller.

Haeman, D.: Über den Stoß zwischen Lichtquanten und freien Elektronen. Bul. fac. ști. Cernăuți 9, 360—375 (1935).

Experimentelle Methode zum Nachweis des Comptoneffektes im ultravioletten und sichtbaren Gebiet.

Waller (Uppsala).

Laue, M. v.: Zur Theorie der Kikuchilinen. Ann. Physik, V. F. 25, 569—576 (1936).

Es wird für die Kikuchilinen die Erklärung gegeben, daß sie durch Streuung unter Energieabgabe, somit inkohärente Streuung, an Elektronen entstehen, die an bestimmte Atome gebunden sind. Leitungselektronen können keine solche Linien liefern.

Waller (Uppsala).

Klassische Optik.

Boegehold, H.: Raumsymmetrische Abbildung. Z. Instrumentenkde 56, 98—109 (1936).

Als „raumsymmetrische“ Abbildung bezeichnet der Verf. eine Abbildung durch ein optisches System, bei der jedem Punkt des Raumes bildseitig ein achsensymmetrisches Strahlenbündel entspricht, d. h. ein Strahlenbündel, das eine zu ihm gehörige Gerade besitzt, die von allen übrigen Strahlen des Bündels geschnitten wird und in bezug auf die der bildseitige Verlauf der Lichtstrahlen symmetrisch ist bzw. doch sein würde, wenn der Querschnitt des Bündels senkrecht zu jener Geraden kreisförmig begrenzt wäre. Eine und — wie der Verf. in der Arbeit zeigt — die einzige raumsymmetrische Abbildung ist die durch eine beliebige Zahl konzentrischer spiegelnder oder brechender Kugelflächen, die sog. „kugelsymmetrische“ Abbildung. *Picht* (Berlin-Steglitz).

Smith, T.: An optical calibration problem. Proc. Physic. Soc., London 48, 75—78 (1936).

Ist ein optisches System vorgelegt, dessen optische Daten experimentell bestimmt werden sollen, so kann dies grundsätzlich dadurch geschehen, daß man die Lagebeziehung von drei — beliebigen — konjugierten Ebenenpaaren experimentell ermittelt. Denn sind u bzw. u' die Abstände der Objekt- bzw. Bildebene von einem festen Punkt der Achse, so besteht zwischen u und u' eine Beziehung der Form $Auu' - Bu' - Cu + D = 0$. Das Verhältnis der Koeffizienten A, B, C, D läßt sich aus drei Wertepaaren u, u' bestimmen. Da aber die experimentelle Bestimmung der benötigten Wertepaare u, u' nicht sehr genau durchführbar ist, wird man bei Wahl anderer Wertepaare zu anderen Koeffizientenverhältnissen geführt werden. Der Verf. schlägt daher eine andere Methode zur Bestimmung der optischen Daten vor, die vier Wertepaare u, u' und den gegenseitigen Abstand von Bild- und Objektebene benutzt und aus Überlegungen abgeleitet wird, die von der Differenz der optischen Lichtwege zwischen Objekt- und Bildpunkt, einmal gemessen längs eines Randstrahls, einmal längs der Achse, ausgehen. *Picht* (Berlin-Steglitz).

Middleton, W. E. Knowles: On the colours of distant objects, and the visual range of coloured objects. Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 29, 127—154 (1935).

The author develops expressions for the color coordinates and apparent brightness of objects seen through an obscuring atmosphere using the methods of the C. I. E. system. In the first chapter he gives a short report of the theory of the C. I. E. system. The apparent brightness of a distant object is investigated independent of its color, and formulae are derived which show the change in color with distance, if some assumptions are made about the extinction coefficient of the atmosphere in relation to the wave length. At the end the author investigates the visual range of distant objects. A comparison of his numerical values with the values of the saturation lines by Jones and Lowry leads to the conclusion that all objects become grey before becoming indistinguishable. He remarks that his theory can be useful for determining the color of shadows. He suggests the construction of an accurate portable colorimeter to determine the visual range of colored objects. *Herzberger* (Rochester).

Hilberry, Norman: Theory of the multiple diffraction grating. J. Opt. Soc. Amer. 26, 1—11 (1936).

Die Intensitätsverteilung in den Diffraktionsmaxima eines Gitters, das aus N elementaren Gittern besteht, zwischen denen nicht geritzte Intervalle liegen, wird berechnet. Ist k das (ganzzahlige) Verhältnis der großen zur kleinen Periode des Gitters, so ist sein Auflösungsvermögen gleich $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{hNk}$ (h = Ordnung des Spektrums) — also gleich dem Auflösungsvermögen eines Gitters mit Nk geritzten Strichen. Das Dispersionsgebiet ist gleich $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{hk}$. Verf. meint, daß solche Gitter von praktischer

Bedeutung sein können, weil für ihre Herstellung weniger Zeit nötig ist als für Herstellung eines einfachen Gitters gleichen Auflösungsvermögens. *M. Leontowitsch.*

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Michailov, A.: Über die Anwendung der Formel von Stokes und die dabei zu gebrauchende Reduktion der Schwerkraft. (8. Tag., Tallinn u. Tartu, Sitzg. v. 20.—23. VIII. 1925.) Verh. Balt. geodät. Komm. 207—231 (1936).

Zur Klärung der Frage, nach welchem Verfahren die beobachteten Schwerkraftswerte zu reduzieren wären, um mit Hilfe der reduzierten Werte nach der Formel von Stokes die Größe der Geoidundulationen berechnen zu können, prüft der Verf. zunächst an drei leicht übersehbaren Beispielen (rotierendes und ruhendes Ellipsoid, Kugel mit aufgesetztem Reifen) die Formel von Stokes und kommt zu dem Ergebnis, daß sie, wenigstens in den drei gewählten Beispielen, mehr leistet, als nach den bei ihrer Ableitung begangenen Vernachlässigungen zu erwarten wäre. An den beiden folgenden Beispielen (Kugel mit verschieden eingebettetem Kontinent) werden die üblichen Reduktionsverfahren nach Faye, Bouguer, Prey geprüft; aus den Ergebnissen glaubt der Verf. auf die Unanwendbarkeit der Reduktionsformel von Prey bei der Berechnung der Undulationen nach der Formel von Stokes schließen zu dürfen.

Hopfner (Wien).

Whipple, F. J. W., and A. W. Lee: Notes on the theory of microseisms. Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. 3, 287—297 (1935).

In Bezug auf eine Arbeit von Banerji (vgl. dies. Zbl. 11, 288) über Ursache und Ausbreitung der mikroseismischen Bodenunruhe wird betont, daß nach den Untersuchungen in Kew Luftdruckschwankungen nicht direkt auf Seismographen wirken, wohl aber Gebäudeschwingungen, die durch Luftdruckschwankungen oder Windstöße verursacht sind, des weiteren, daß die Mikroseismik auf 22 Stationen bei gleicher Wetterlage ganz verschieden groß ist, daß aber in beiden Fällen das Verhältnis der horizontalen zur vertikalen Komponente im Mittel 3,7:1 und 3,8:1 ist. Bei diesen Untersuchungen zeigt sich eine eindeutige Abhängigkeit der mikroseismischen Bewegung vom geologischen Untergrund. — Unter Berücksichtigung der Kompressibilität des Wassers werden durch Luftdruckschwankungen im Wasser 2 Wellenarten erzeugt, 1. Oberflächenwellen, 2. Kompressionswellen, die mit Schallgeschwindigkeit nach unten dringen und auf den Meeresboden wirken. Die Ursache, daß bei gleichen Wetterlagen recht unterschiedliche Bodenunruhe beobachtet wird, möchten Verff. in dem Zusammenwirken von Luft- und Meeresbewegung sehen. — Entgegen der hier vertretenen Ansicht über Ursprung der Mikroseismik sei auf die Arbeiten von Wiechert, Gutenberg, Tams, Linke und van Everdingen hingewiesen, die die wesentliche Ursache der Mikroseismik in der Brandung an Steilküsten sehen möchten.

Brockamp (Potsdam).

Baxter, E. F., and J. A. Archer: Note on the generation of forced oscillations on the sea-bed. Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. 3, 298—302 (1935).

Mikroseismogramme von Colaba, Indien, zeigten nach S. K. Banerji [Philos. Trans. Roy. Soc. (A) 1930, 229] den Einfluß des Seeganges und des Abstandes vom Sturmzentrum. In Banerjis Arbeit finden sich aber einige Fehler in der Berechnung der durch fortschreitende Wellen erzeugten elastischen Schwingungen des Meeresgrundes, die von den Verff. verbessert werden. Unter der auch von Banerji gemachten Annahme $\lambda = \mu$ und Vernachlässigung von Größen dritter Ordnung ist das Verhältnis von Horizontal- und Vertikalamplitude der Verrückung gleich 1:3. Für eine Seetiefe von 250 Fuß, Periode 7 Sekunden, und mit plausiblen Annahmen über die elastischen Konstanten ergeben sich Verrückungen von $1,6 \cdot 10^{-2}$ bzw. $4,8 \cdot 10^{-2}$ Mikron. Werden stationäre Wellen angenommen und eine Strömungsgeschwindigkeit des

Wassers $c = \frac{(g \cdot D \cdot \operatorname{tgh} f \cdot D)^{1/2}}{f \cdot D}$ (g = Fallbeschleunigung, D = Tiefe, $2\pi/f$ = Wellenlänge), so ergeben sich dieselben Ausdrücke für die Amplituden der Verrückungen wie im Falle fortschreitender Wellen, wenn wieder die elastischen Konstanten gleichgesetzt werden.

Haurwitz (Toronto, Ont.).

Gross, B.: Zur Analyse der Ultrastrahlung. *Physik. Z.* **37**, 12—18 (1936).

Es wird die Absorption der Ultrastrahlung diskutiert unter der Annahme, daß die primären geladenen Teilchen Sekundärstrahlen mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zur Primärenergie erzeugen. Es ergibt sich, daß die totale Ionisation (durch Primär- und Sekundärstrahlen zusammen) als Funktion der durchlaufenen Schichtdicke nicht einfach proportional zur Primärintensität bleibt, sondern stärker mit der Höhe ansteigt als die Primärintensität allein. Es wird eine Methode entwickelt, nach der unter der obigen Annahme die Energieverteilung der Primärstrahlen aus dem Verlauf der Gesamtionisation mit der Höhe berechnet werden kann. Die Anwendung der erhaltenen Formeln soll in einer späteren Arbeit erfolgen. Nordheim (Lafayette).

Healey, R. H.: The influence of the radiation field from an electrical storm on the ionization density of the ionosphere. *Philos. Mag.*, VII. s. **21**, 187—198 (1936).

Verf. geht aus von der Bemerkung, daß während eines Sturmes in der niederen Atmosphäre die Ionisation meistens steigt. Zur besseren Erforschung dieser Verhältnisse schlägt er vor, eine stark gedämpfte elektrische Welle in eine solche Atmosphäre eindringen zu lassen, um dann aus ihrem Fortpflanzungsverhalten auf den Zustand der Atmosphäre zu schließen. Im zweiten Abschnitt betrachtet Verf. die Arbeit, welche ein stark gedämpftes elektrisches Wechselfeld leistet, während der freien Weglänge eines Elektrons, das sich in einem magnetischen Felde befindet. Die Berechnung verläuft nach der klassischen Elektronentheorie. Im dritten Abschnitt gibt Verf. numerische Berechnungen auf Grund seiner vorher abgeleiteten Ausdrücke. Strutt.

Prandtl, L.: Anwendung der turbulenten Reibungsgesetze auf atmosphärische Strömungen. (*Cambridge, England*, 3.—9. VII. 1934.) *Proc. 4. internat. Congr. appl. Mech.*, 238—239 (1935).

Diese Mitteilung [anknüpfend an Ausführungen in Beitr. Physik frei. Atmosph. **19**, 188 (1932)] gibt nur eine kurze Übersicht von einigen Aufgaben bezüglich Luftströmungen über die Erdoberfläche, welche mit Hilfe der Impulsgleichungen für die Grenzschicht unter Anwendung der neueren Formeln für die turbulente Strömung gelöst worden sind. Einerseits sind Fragen über die räumliche und zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsprofils behandelt (u. a. Einbruch einer Kaltluftmasse); andererseits Probleme, die zusammenhängen mit den Vorgängen der atmosphärischen Zirkulation, wobei die thermischen Auftriebe durch ein Feld von eingepprägten Kräften ersetzt sind. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Reibungsschicht ($z < h$) ist angenommen nach der Formel: $u = U \log \frac{z}{z_0} / \log \frac{h}{z_0}$, wo U = Geschwindigkeit für $z \geq h$; $z_0 \approx 1/30$ der Höhe der Unebenheiten (Rauigkeitsmaß). Dazu kommt für die Bodenreibung: $\tau_0 = 0,03 \rho U^2 \left(10 \log \frac{h}{z_0} \right)^2$, während bei den Zirkulationsproblemen wegen der Coriolis-Beschleunigung noch ein Ansatz für die Quergeschwindigkeit erforderlich ist. Es wird erwähnt, daß die Methode sich dazu eignet, Musterbeispiele für verschiedene mechanisch zulässige Zirkulationsarten aufzustellen. (Vgl. dies. Zbl. **4**, 238.) J. M. Burgers (Delft). °°

Ludwig, Georg: Der Temperatur- und Wärmehaushalt in einem Hochdruckgebiet. *Synoptische Bearbeitungen der Wetterdienststelle Frankfurt a. M.* **43** S. 1935.

Es werden mit Hilfe des von Möller und Mügge (vgl. dies. Zbl. **4**, 237) entworfenen Strahlungspapiers die auf- und abwärtsgehenden Strahlungsströme längs der Vertikalen in sehr vielen Punkten (Stationen) während der ausgeprägten Hochdruckwetterlage vom 30. IX. bis 2. X. 1908 berechnet. Ihre Differenz ergibt die effektive Ausstrahlung in jedem Punkt, und deren Differentialquotient ist bestimmend für die

individuelle Temperaturänderung. Es ergibt sich das schon bekannte Resultat, daß die Änderung der effektiven Ausstrahlung mit der Höhe und damit die individuelle Abkühlung ein Maximum in der oberen Troposphäre aufweist (Albrechtsche Emissionsschicht). In dem untersuchten Falle tritt ein weiteres Maximum der individuellen Abkühlung in den untersten troposphärischen Schichten auf, das ursächlich mit der antizyklonalen Wetterlage zusammenzuhängen scheint, bedingt durch den Feuchtigkeitsrückgang an der Abgleitfläche. Die Gegenstrahlung hat ihre größten Werte am Boden, sie nimmt schnell ab und nähert sich in der Stratosphäre einem nur mehr sehr kleinen konstanten Wert. Weitere Untersuchungen zeigen, daß bei verschiedenen Bodentemperaturen die Strahlung der alleruntersten Schichten etwa gleich bleibt, daß aber die Ausstrahlung der oberen Schichten mit wachsender Bodentemperatur zunimmt, ein für den Wärmehaushalt der Antizyklone wichtiges Resultat. Die Zerlegung der individuellen Temperaturänderung in den lokalen und den advektiven Bestandteil liefert die Temperaturänderungen durch Advektion und Konvektion. Diese letztgenannten überwiegen zahlenmäßig die Strahlungswirkungen, hingegen sind diese wegen ihrer großräumigen Verteilung nicht weniger von Wichtigkeit für den Strahlungshaushalt der Antizyklone. Es ergibt sich als Folgerung aus vorstehender Tatsache, daß Gebiete mit Kaltluftzufuhr solche absinkender Luftbewegung darstellen. Zum Schluß werden die gefundenen Ergebnisse synoptisch ausgedeutet. Reichhaltiges Kartenmaterial dient zur anschaulichen Unterstützung der im Text erhaltenen Resultate.

H. Philipps (Frankfurt a. M.).

Sverdrup, H. U.: Austausch und Stabilität in der untersten Luftschicht. Meteorol. Z. 53, 10—15 (1936).

Im Anschluß an Rossby und Montgomery werden Austauschkoeffizient und Windverteilung in der untersten Luftschicht unter der sicherlich annähernd richtigen Voraussetzung eines Potenzgesetzes für die potentielle Temperatur θ

$$\theta_z = \theta_0 + b(z + z_0)^{1/n}$$

(b, n, z_0 Konstanten, z_0 Rauigkeitsmaß der Erdoberfläche) ermittelt. Die Differenz der kinetischen Energie im stabilen Falle (unteradiabatischer Temperaturgradient) und homogenen Falle (adiabatischer Temperaturgradient) wird als potentielle Energie ausgedrückt, da die Turbulenzelemente eine von ihrer Umgebung abweichende Dichte haben. Ferner wird angenommen, daß im stabilen ebenso wie im homogenen Falle die Schubspannung τ gleich ist dem Produkt aus Dichte ρ , Mischungsweg und vertikaler Windänderung. Mit $\alpha^2 = \beta \cdot g \cdot b / T \cdot n$ (β Proportionalitätsfaktor, g Fallbeschleunigung, T absolute Temperatur) und

$$v = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1 + 4\alpha^2(z + z_0)^{\frac{n+1}{n}}}{\left(\frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}\right)^2}}$$

($k_0 = .38$, dimensionslose Konstante) wird die Windgeschwindigkeit

$$u = \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \ln \frac{z + z_0}{z_0} + \frac{n}{n+1} \frac{2}{k_0} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \left[2(v-1) - \ln \frac{v(v+1)}{2} \right].$$

Im Falle geringer Stabilität überwiegt der erste Summand (homogener Fall), der zweite gibt eine Potenzabhängigkeit von der Höhe. Das gleiche gilt für den Austauschkoeffizienten. Bei großer Stabilität resultiert eine Potenzformel für die Windabhängigkeit von der Höhe. Die Theorie wird an Beobachtungen von Spitzbergen geprüft und befriedigende Übereinstimmung gefunden.

Haurwitz (Toronto).

Eggert, O.: Die stereographische Abbildung des Erdellipsoids. Z. Vermessungswes. 65, 153—164 (1936).

Verf. gibt zunächst einen Überblick über die bisherigen Lösungen der Aufgabe,

das Erdellipsoid stereographisch in der Ebene abzubilden. Insbesondere wird festgestellt, daß die von Gauß angegebene und von L. Krüger näher untersuchte stereographische Abbildung eine konforme Doppelprojektion darstellt, indem das Ellipsoid erst konform auf die Kugel und diese dann mittels der stereographischen Projektion konform auf die Ebene übertragen wird. Im Anschluß hieran entwickelt Verf. eine neue Lösung. Sie ist wesentlich von der Beantwortung der Frage abhängig, wie man überhaupt eine stereographische Projektion für ein Ellipsoid zu definieren hat. Verf. benutzt die Tatsache, daß die stereographische Projektion der Kugel in der Ebene azimutal ist, als Definition für die stereographische Projektion des Ellipsoids in der Ebene und verwendet zur Entwicklung der Übertragungsformeln Vertikalschnitte des Ellipsoids. Die Schlußformeln sind streng bis zu den Gliedern vierter Ordnung. *Schmehl.*

Wirowetz, A.: Die Lösung der direkten geodätischen Aufgabe bei einem bedeutenden Abstände zwischen zwei Punkten. (8. Tag., Tallinn u. Tartu, Sitzg. v. 20.—23. VIII. 1935.) Verh. Balt. geodät. Komm. 196—206 (1936).

Unter der direkten geodätischen Aufgabe versteht Verf. die Hauptaufgabe der höheren Geodäsie: Gegeben sind (mit Bezug auf ein Umdrehungsellipsoid) die geographischen Koordinaten des Anfangspunktes einer geodätischen Linie, ihre Länge und ihr Azimut im Anfangspunkt; gesucht sind die geographischen Koordinaten für den Endpunkt der geodätischen Linie und ihr Azimut im Endpunkt. Die Lösung fußt im wesentlichen auf Reihenentwicklungen für die Länge der geodätischen Linie und für den geographischen Längenunterschied zweier Punkte dieser Linie nach Potenzen der Exzentrizität der Meridianellipse. Das Ergebnis ist der Besselschen Lösung ähnlich. Die Umkehrung der Hauptaufgabe: Aus den geographischen Koordinaten zweier Punkte einer geodätischen Linie die Länge und die Azimute der geodätischen Linie zu berechnen, führt auf der gleichen Grundlage zu Formeln, die umständlicher sind als die sonst gebräuchlichen Formeln zu ihrer Lösung. *Schmehl (Potsdam).*

Ammermann, E.: Beitrag zur Bestimmung eines Punktpaares nach vier gegebenen Punkten auf der Kugel. Z. Vermessgswes. 65, 241—248 (1936).

Kawraisky, W. W.: Einige Untersuchungen auf dem Gebiete der mathematischen Kartographie. (8. Tag., Tallinn u. Tartu, Sitzg. v. 20.—23. VIII. 1935.) Verh. Balt. geodät. Komm. 257—286 (1936).

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür wird aufgestellt, daß 2 winkeltreue Karten einen gemeinsamen Zentralpunkt haben, d. h. einen Punkt, in dem der Gradient des Vergrößerungsverhältnisses gleich Null ist. Diese Abbildung unterscheidet sich sehr wenig von einer von Laborde vorgeschlagenen. Verf. berechnet eine Tafel der Gauß-Krügerschen Koordinaten für eine etwa 32° breite Zone in Abständen von $1-2^\circ$, wodurch die winkeltreuen Abbildungen von Tschebyschev, Tissot, Schols und Driencourt (Aeronavigation) erleichtert werden. Die winkel- und flächentreuen Abbildungen von Zinger werden vereinfacht, besonders wenn die abzubildenden Gebiete durch typische Figuren angenähert werden können. Eine schmale Zone mit beliebiger Form auf dem Sphäroid wird annähernd winkeltreu abgebildet, wobei die Länge und geodätische Krümmung der Mittellinie erhalten bleiben und das Vergrößerungsverhältnis auf ihr einen extremen Wert annimmt. Flächentreue Abbildungen werden angegeben, bei denen die Breitenkreise konzentrische Kreise mit konstantem Vergrößerungsverhältnis sind (Spezialfall: Bonnesche Abbildung), besonders für Weltkarten. Die isozylindrische, sinusoidale, parabolische, Mollweidesche und Eckertsche Abbildung werden zu einer flächentreuen Abbildung mit variierbarer Äquideformate verallgemeinert, womit eine Wandkarte von Australien, des Stillen Ozeans und eines Teiles des Indischen Ozeans vorbereitet wird. Eine der Weltkarte von Adams nahestehende Abbildung ist gerechnet, abgebildet und verglichen mit der von Eisenlohr.

K. Ludwig (Hannover).